Lehrbuch der Potentialtheorie.

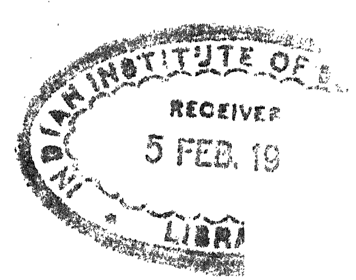
Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunktionen im Raume.

Von

Dr. Arthur Korn,
Privatdozent an der k. Universität München.

Mit 94 in den Text gedruckten Figuren.





Berlin 1899.

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.

5304

Vorwort.

Die Theorie des Potentials verdankt ihre Entstehung dem wesentlichen Nutzen, welchen die Einführung dieses rein geometrischen Begriffes in allen den Problemen der Physik gewährt, bei welchen es sich um Bewegungen von Massen handelt, die auf einander dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportionale Anziehungs- oder Abstofsungskräfte auszuüben scheinen. Denken wir uns bei einem solchen Wechselwirkungsgesetz, wie es durch das Newtonsche Gravitationsgesetz in die Mechanik des Himmels, durch das Coulombsche Gesetz in die Theorie der elektrischen Erscheinungen eingeführt wird, ein Massenteilchen m an der Stelle (xyz) von beliebig vielen Massenteilchen m_j an den Stellen $(x_j\, y_j\, z_j)$ beeinflusst, so sind die Komponenten der Gesamtkraft, welche alle Teilchen m_j auf das Teilchen m auszuüben scheinen:

$$X = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{x - x_j}{r_j},$$

$$Y = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{y - y_j}{r_j},$$

$$Z = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{z - z_j}{r_j},$$

wo die ε_j Konstanten vorstellen, r_j die Entfernung:

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j^2)}$$

und Richtung:

$$(x_j\, y_j\, z_j) \longrightarrow (x\, y\, z)$$

Lehrbuch der Potentialtheorie.

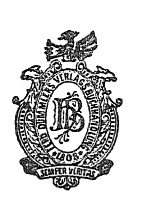
Allgemeine Theorie des Potentials und der Potentialfunktionen im Raume.

Von

Dr. Arthur Korn,

Privatdozent an der k. Universität München.

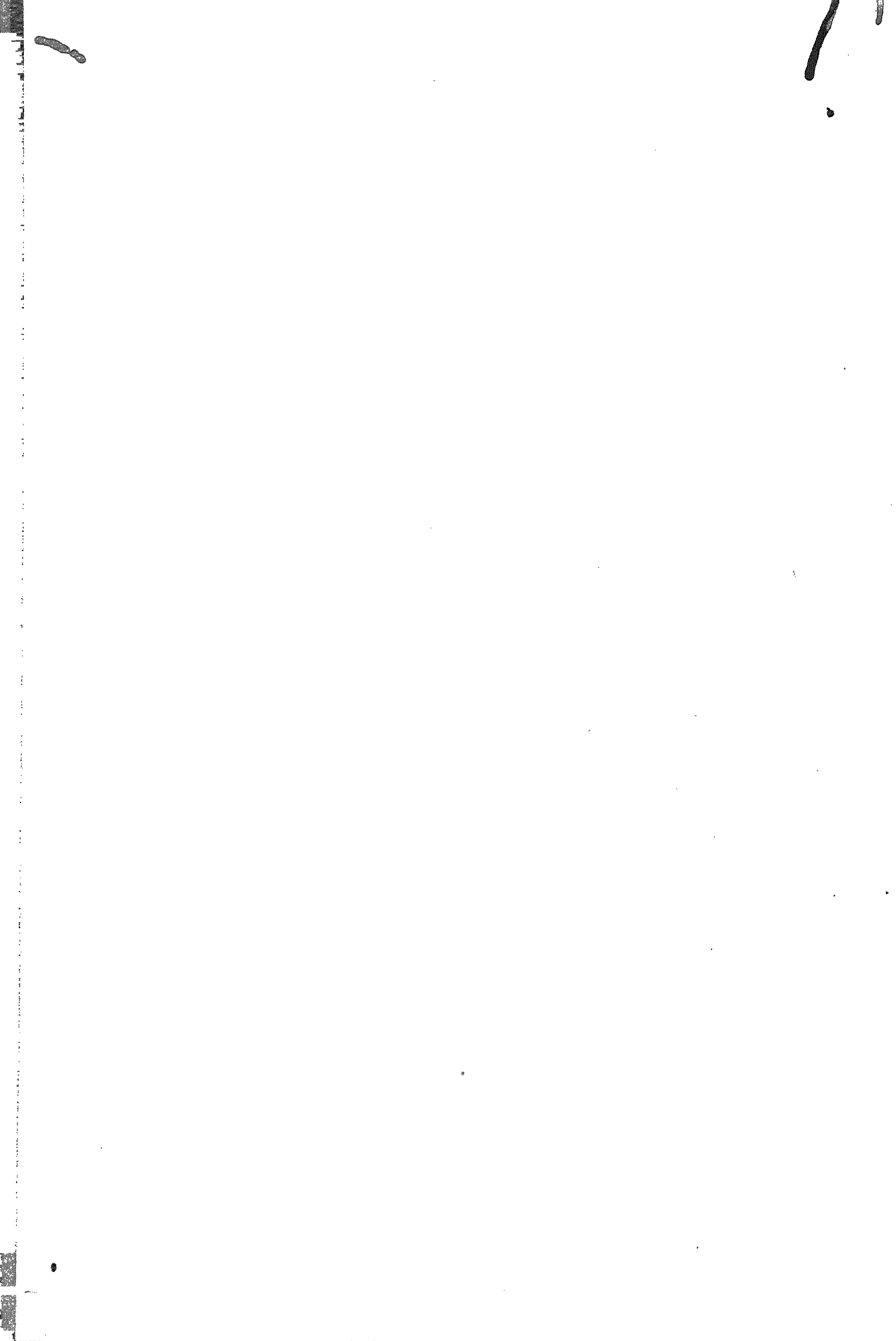
Mit 94 in den Text gedruckten Figuren.





Berlin 1899.

Ferd. Dümmlers Verlagsbuchhandlung.



5304

Vorwort.

Die Theorie des Potentials verdankt ihre Entstehung dem wesentlichen Nutzen, welchen die Einführung dieses rein geometrischen Begriffes in allen den Problemen der Physik gewährt, bei welchen es sich um Bewegungen von Massen handelt, die auf einander dem Quadrate ihrer gegenseitigen Entfernungen umgekehrt proportionale Anziehungs- oder Abstofsungskräfte auszuüben scheinen. Denken wir uns bei einem solchen Wechselwirkungsgesetz, wie es durch das Newtonsche Gravitationsgesetz in die Mechanik des Himmels, durch das Coulombsche Gesetz in die Theorie der elektrischen Erscheinungen eingeführt wird, ein Massenteilchen m an der Stelle (xyz) von beliebig vielen Massenteilchen m_j an den Stellen $(x_j\, y_j\, z_j)$ beeinflusst, so sind die Komponenten der Gesamtkraft, welche alle Teilchen m_j auf das Teilchen m auszuüben scheinen:

$$X = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{x - x_j}{r_j},$$

$$Y = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{y - y_j}{r_j},$$

$$Z = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j^2} \cdot \frac{z - z_j}{r_j},$$

wo die ε_j Konstanten vorstellen, r_j die Entfernung:

$$r_j = \sqrt{(x - x_j)^2 + (y - y_j)^2 + (z - z_j^2)}$$

und Richtung:

$$(x_j\, y_j\, z_j) \longrightarrow (x\, y\, z)$$

repräsentiert, deren Richtungskosinusse ja durch die Quotienten:

$$\frac{x - x_j}{r_j}, \quad \frac{y - y_j}{r_j}, \quad \frac{z - z_j}{r_j}$$

gegeben sind.

Da sich nun X, Y, Z in der Form darstellen lassen:

$$X = -\frac{\partial V}{\partial x},$$

$$Y = -\frac{\partial V}{\partial y},$$

$$Z = -\frac{\partial V}{\partial z},$$

wenn man:

$$V = \sum_j \frac{\varepsilon_j}{r_j}$$

setzt, so sieht man, dass zur Bestimmung der Kräfte X, Y, Z lediglich die Kenntnis einer einzigen Funktion V erforderlich ist, die man als das Potential der von dem Massensystem m_j auf m ausgeübten Kraftwirkung bezeichnet.

Mit den Eigenschaften dieser Funktion V, als deren wichtigste die Erfüllung der partiellen (Laplaceschen) Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

anzusehen ist, hat sich die Theorie des Potentials im eigentlichen Sinne zu beschäftigen.

Die hier besonders hervorgehobene Eigenschaft jedes Potentials, eine partikuläre Lösung der Laplaceschen Gleichung zu sein, hat allmählich das Interesse des Mathematikers der Integration dieser Gleichung zugewandt, und man könnte wohl die Potentialtheorie in ihrer gegenwärtigen Ausdehnung geradezu als die Lehre von der Integration der Laplaceschen Gleichung definieren.

Diese Wandlung hat sich nicht bloſs in der reinen Analyse vollzogen, eine groſse Umwälzung in den Ideen über die Wechelwirkungen, denen der Begriff des Potentials seine Entstehung verdankte, ist mit derselben Hand in Hand gegangen; man ist von der

Voraussetzung der Fernewirkung zu der Annahme fortgeschritten, dass nur ein Zwischenmedium durch stetige Fortpflanzung eines Bewegungszustandes von einem Teilchen zum anderen die Wechselwirkung zweier räumlich getrennter Teilchen vermitteln kann, der früher leer geglaubte Raum aufserhalb derselben hat sich belebt, und sein Bewegungszustand wird an jeder Stelle durch den Wert einer Funktion V (einer sogenannten Potentialfunktion) bestimmt, welche in ganzer Erstreckung des genannten Raumes der Laplaceschen Gleichung genügt, und der man ebenso, wie ihren ersten Ableitungen, die Eigenschaft der Stetigkeit beilegte.

Die wichtigsten Aufgaben der theoretischen Physik laufen nunmehr auf das mathematische Problem hinaus: Potentialfunktionen eines gegebenen Raumgebietes zu finden, welche an der Oberfläche desselben vorgeschriebene Grenzbedingungen erfüllen, und unter ihnen sind die beiden wichtigsten:

1. Das elektrostatische Problem: Potentialfunktionen gegebener Raumgebiete zu finden, wenn ihre Randwerte vorgeschrieben sind.

2. Das hydrodynamische Problem: Potentialfunktionen gegebener Raumgebiete zu finden, wenn ihre normalen Ableitungen an der Grenze vorgeschrieben sind.

In dem vorliegenden Lehrbuch der Potentialtheorie habe ich zwei wesentlich verschiedene Gesichtspunkte zu vereinigen gesucht; dasselbe soll einmal zur Einführung in die Potentialtheorie dienen (Teil I bis III) und setzt nur die Vorkenntnisse voraus, welche nach den gewöhnlichen Anfangsvorlesungen über Differential- und Integralrechnung, sowie die analytische Geometrie der Ebene und des Raumes erwartet werden dürfen; es soll aber andererseits auch (Teil IV und V) den Leser, nachdem er sich mit den Grundlagen der Theorie vertraut gemacht hat, bis zu den gegenwärtigen Grenzen dieses für die theoretische Physik wichtigsten Gebietes der Mathematik hinführen. Um das Buch beiden Zwecken dienstbar zu machen, habe ich einige Untersuchungen in Teil I bis III, welche für die erste Einführung in die Theorie nicht von nöten sind, in kleinem Druck beigefügt oder in besonderen Anmerkungen am Schlusse des Buches gegeben; für das Studium von Teil IV

und V sind aber auch diese kleingedruckten Stellen und Anmerkungen eine unumgängliche Voraussetzung.*)

Nachdem im I. bis III. Teile die allgemeinen Eigenschaften der Potentiale, die Theorie der Kugelfunktionen und die Grundlagen der Theorie der Potentialfunktionen auseinandergesetzt sind, beschäftigen wir uns in Teil IV und V mit der Integration der Laplaceschen Gleichung, mit den bisher allgemeinsten Lösungen des elektrostatischen und hydrodynamischen Problemes; diese Untersuchungen bauen sich im wesentlichen auf die folgenden hervorragenden Arbeiten**) auf:

C. Neumann, Über die Methode des arithmetischen Mittels (Abhandlungen der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften 1887). (Die Grundzüge dieser Methode zuerst veröffentlicht 21. 4. und 31. 10. 1870 Ber. der k. sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften).

H. Poincaré, la méthode de Neumann et le problème de Dirichlet (acta mathematica 1895).

H. A. Schwarz, Über einen Grenzübergang durch alternierendes Verfahren (Vierteljahrsschrift der naturforschenden Gesellschaft in Zürich 30. 5. 1870).

M. A. Liapounoff, sur certaines questions qui se rattachent au problème de Dirichlet (journal de mathématiques 1898).

Durch die Methode von Neumann gelang es zum erstenmale, Funktionen zu konstruieren, welche im Aufsenraume oder Innenraume irgend einer geschlossenen Fläche ω stetig sind, der Laplaceschen Gleichung genügen, an der Fläche ω vorgeschriebene Werte f annehmen, und deren sämtliche Ableitungen in irgend welchen Entfernungen von ω stetig sind, falls nur die Fläche ω überall konvex ist (d. h. von irgend einer Geraden im Raume in höchstens zwei Punkten geschnitten werden kann),***) und falls die vorgeschriebenen Randwerte f auf ω stetig sind.

Poincaré hat diese Methode für eine beliebige geschlossene, stetig gekrümmte, einfach zusammenhängende Fläche ω und für Randwerte f bewiesen, die mit allen Ableitungen auf ω stetig sind, aber unter den beiden folgenden wesentlichen Restriktionen:

1. Es muss die Existenz der gesuchten Funktion bereits auf irgend eine andere Weise gesichert sein;

2. Es müssen Transformationen existieren, welche den Innenraum der Fläche ω in den Innenraum einer Kugel, den Aufsenraum von ω in den Aufsenraum dieser Kugel verwandeln, Transformationen, die gewissen Stetigkeitsbedingungen genügen und vor allem jedem Elemente $d\omega$ von ω

---

*) Die wenigen in Teil IV und V kleingedruckten Stellen mögen zweckmäfsig auch bei dem Studium dieser Teile zuerst übersprungen und erst nachträglich berücksichtigt werden.

**) Ein ausführlicheres Litteraturverzeichnis findet sich am Ende des Buches.

***) Den gleichfalls ausgeschlossenen, singulären Fall der sogenannten Zweisternigkeit wollen wir nicht besonders bemerken.

ein Element $d\omega'$ der Kugelfläche zuordnen von solcher Art, dass der Quotient

$$\frac{d\omega}{d\omega'}$$

endlich und von null verschieden ist.

Was die erste Bedingung anbetrifft, so möchte ich hier nicht auf die schwierige Frage eingehen, unter welchen Bedingungen die bisherigen Methoden der Ausmessung durch unendlich viele Kugelflächen (sei es mit Hilfe der Betrachtungen von Schwarz oder der „balayage"-Methode*) von Poincaré) wirklich einwandsfrei die Existenz der betreffenden Funktionen bis an die Fläche heran beweisen; in jedem Falle leistet uns die Neumannsche Methode mehr: sie beweist uns die Existenz der betreffenden Funktion, indem sie dieselbe wirklich konstruiert, und es wird von Wert sein, die Giltigkeit der Methode von der Bedingung zu befreien, dass die Existenz jener Funktion bereits auf anderem Wege erwiesen sei.

Ich werde nun in Teil IV Abschnitt IV in engem Anschluss an die Poincarésche Arbeit zeigen, dass in einem wichtigen, sehr allgemeinen Falle die Giltigkeit der Neumannschen Methode von jener Voraussetzung unabhängig ist, und überdies kann man gerade in diesem Falle die von Poincaré vorausgesetzten Transformationen wirklich angeben; es ist dies der Fall, dass die Fläche — wie ich mich ausdrücken will — gegen einen inneren Punkt konvex ist, d. h. dass wenigstens ein Punkt innerhalb der Fläche ω existiert, durch den sich keine Tangentialebene der Fläche legen lässt. Wenn durch diese Voraussetzung zunächst die Allgemeinheit von Poincaré beschränkt wird, so wird der Methode in anderer Beziehung eine gröfsere Allgemeinheit gegeben, indem den Randwerten f lediglich die Bedingungen vorgeschrieben werden, dass sie auf ω eindeutig und stetig sein sollen, während ihre ersten Ableitungen bereits in einer endlichen Zahl von Trennungskurven in gewisser Weise unstetig werden dürfen. Diese Verallgemeinerung gestattet dann (Teil IV, Abschnitt V), da jeder genügend kleine Teil einer stetig gekrümmten Oberfläche als Teil einer Fläche auf gefasst werden kann, die gegen einen inneren Punkt konvex ist, mit Hilfe der Methoden von Schwarz zu beliebigen, stetig gekrümmten Flächen ω überzugehen und auf Grund der Neumannschen Methode und einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen das gewünschte Resultat zu erreichen.

Der V. Teil beschäftigt sich sodann zunächst mit der Frage, wann die so konstruierten Funktionen wirklich Potentialfunktionen sind, d. h. wann auch die ersten Ableitungen der so konstruierten Funktionen bis an die Fläche ω heran eindeutig und stetig sind. Diese für die theoretische Physik äufserst wichtige Frage ist bereits in der Arbeit von Liapounoff mit Hilfe eines aufserordentlich geistvollen Kunstgriffes untersucht worden, unter der Voraussetzung, dass die Neumannsche Methode anwendbar

*) Da ich dieselbe nicht in mein Buch aufgenommen habe, möchte ich nicht verfehlen, wenigstens an dieser Stelle auf diese scharfsinnige Untersuchung Poincarés hinzuweisen. (American journal of Mathematics B. 9.)

ist. Auf den Poincaréschen Beweis darf sich nun diese Untersuchung eigentlich nicht stützen, da das, was Liapounoff beweisen will, eine Voraussetzung des Poincaréschen Beweises bildet, wohl ist sie aber sofort auf Flächen anwendbar, die gegen einen inneren Punkt konvex sind.*) (Teil V, Abschnitt I, Kap 1). Diese Untersuchung leistet nun noch mehr, als eine sehr allgemeine Lösung elektrostatischer Probleme, sie lässt sich mit Hilfe einer Modifikation der Neumannschen Methode, die von Robin**) herrührt, auch (Teil V, Abschnitt II, Kap. 1) zu einer sehr allgemeinen Lösung hydrodynamischer Probleme verwerten.

Zum Schlusse werden die erhaltenen Resultate mit Hilfe der Methoden von Murphy auf Flächen ausgedehnt, die aus mehreren getrennten Teilen bestehen (Teil V, Abschnitt III) und eine für die Hydrodynamik und die Theorie der elektrischen Erscheinungen wichtige Ausdehnung des Begriffs der Potentialfunktion in mehrfach zusammenhängenden Räumen behandelt. (Teil V, Abschnitt IV).

Obgleich ich alle Bezeichnungen, in denen ich von anderen Autoren abweiche, durch Definitionen im Text besonders hervorhebe, möchte ich doch bereits hier auf einige Eigenarten meiner Ausdrucksweise hindeuten.

1. Wenn ich von einer Funktion spreche, die in einem gegebenen Raume, auf einer gegebenen Fläche oder Kurve endlich sein soll, so soll (vgl. Festsetzung in der Anm. S. 3) dieser Ausdruck stets im Sinne von im allgemeinen eindeutig und stetig (vgl. Definitionen S. 1, 9, 16) verstanden werden, so dass dieser Begriff stets die Integrierbarkeit in sich schliesst.

2. Wenn ich von einem stetig gekrümmten Flächenteile spreche, so sollen auf demselben die Richtungskosinusse der Normalen $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ eindeutig und stetig und ihre ersten Ableitungen endlich sein.

3. Wenn ich von einer Funktion f der Stelle auf einer Fläche sage, sie ist auf derselben regulär, soll damit gesagt sein (vgl. Anm. (24)), dass die Differenz der Funktionswerte in zwei genügend nahen Punkten der Fläche $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ einer Ungleichung von der Form genügt:

$$\text{abs.}\,(f_1 - f_2) \leqq A r_{12}^{1-\lambda}, \quad (A \text{ endliche Konstante}), \quad (\lambda < 1),$$

wenn r_{12} die Entfernung der beiden Punkte vorstellt.***)

---

*) Den Beweis für die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall habe ich in Kap. 2 angedeutet.

**) Comptes rendus t. CIV.

***) Ich möchte darauf aufmerksam machen, dass Liapounoff den Ausdruck „régulier“ in anderer Bedeutung gebraucht; man könnte daher, namentlich wenn die obige für die Zwecke dieses Buches sehr bequeme Ausdrucksweise mit dem Begriffe kollidieren sollte, den man in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln mit ihr verbindet, den Ausdruck regulär durch regulär stetig ersetzen.

4. Wenn ich eine Gröfse, die durch die Verkleinerung einer anderen Gröfse, z. B. ϱ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, in der Form schreibe:

$$D(\varrho), \text{ oder auch } \Delta(\varrho), \mathfrak{D}(\varrho),$$

so soll damit, auch wenn dies nicht besonders bemerkt wird, stets angedeutet werden, dass die Gröfse bei genügend kleinem ϱ ihrem absoluten Werte nach

$$\leqq A \cdot \varrho^{1-\lambda} \begin{pmatrix} A \text{ endliche Konstante,} \\ \lambda < 1 \end{pmatrix}$$

ist, so dass bei dieser Bezeichnung z. B. die Ungleichung in der Festsetzung 3) in der Form geschrieben werden kann:

$$\text{abs.}\ (f_1 - f_2) = D(r_{12}), \text{ (oder auch } \Delta(r_{12}), \mathfrak{D}(r_{12})).$$

Schliefslich sei noch bemerkt, dass viele Verallgemeinerungen der hier auseinanderzusetzenden Resultate nicht in den Rahmen des Buches aufgenommen wurden, weil mir als Endzweck lediglich die Verwendbarkeit in der theoretischen Physik vorschwebte; Funktionen, die Unstetigkeiten zeigen, werden nur als Mittel zum Zweck angesehen, Ableitungen von Resultaten für stetige Funktionen zu erleichtern; sowie dieser Zweck erreicht ist, werden sie eliminiert. Denn die Natur kennt keine Unstetigkeiten; zu diesem Erfahrungssatz hat sich die Physik mühsam durchgerungen.

München, Winter 1898/99.



Inhaltsverzeichnis.

Lehrbuch der Potentialtheorie.



Einleitende Bemerkungen über Kurven, Flächen und Räume, im besonderen über drei wichtige Integralsätze.

---

1. Kapitel.

Über Kurvenintegrale.

§ 1.

Wir erinnern an folgende Definitionen:

Eine Funktion $f(x)$ heifst in dem Bereiche:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

eindeutig und stetig, falls dieselbe für jeden Wert des Bereiches einen und nur einen bestimmten, endlichen Wert besitzt und die Differenz

$$f(x + \delta x) - f(x)$$

Fig. 1.

für zwei Werte x und $x + \delta x$ des Bereiches durch Verkleinerung von δx unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden kann.

Eine Funktion $f(x)$ heifst in dem Bereiche:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

abteilungsweise eindeutig und stetig, falls sich das Bereich in eine endliche Anzahl von Bereichen zerlegen lässt, in denen die Funktion eindeutig und stetig ist.

Eine Funktion $f(x)$ heifst in dem Bereiche:

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

im allgemeinen eindeutig und stetig, falls die Gesamtlänge der Bereiche, in welchen die Funktion den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit nicht entspricht, kleiner ist als eine beliebig klein gewählte Länge, und falls der Funktionswert für jedes x des Bereiches kleiner ist als irgend ein bestimmter, endlicher Wert.

Eine Funktion f(x) heifst in demselben Bereiche abteilungsweise monoton, falls sich dasselbe in eine endliche Anzahl von Bereichen zerlegen lässt, in denen f fortdauernd wachsend oder fortdauernd abnehmend ist.

§ 2.

Wir denken uns ein Kurvenstück σ im Raume, markieren auf demselben beliebig, aber ein für allemal fest einen Punkt O, dann können wir jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Kurve durch die Bogenlänge σ gegeben denken, welche er, von O an gerechnet, besitzt, sobald wir noch die eine der beiden Richtungen der Kurve als die positive σ Richtung festgesetzt haben. Die Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Kurve werden drei Gleichungen von der Form:

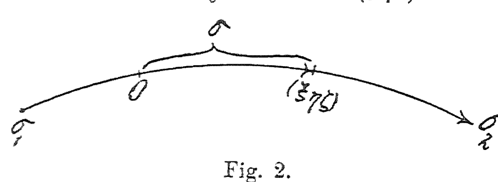


Fig. 2.

$$1)\quad \begin{cases} \xi = \xi(\sigma), \\ \eta = \eta(\sigma), \\ \zeta = \zeta(\sigma) \end{cases}$$

entsprechen, wo $\xi(\sigma)$, $\eta(\sigma)$, $\zeta(\sigma)$ gegebene Funktionen der Bogenlänge σ vorstellen. Wir werden uns stets auf Kurven beschränken, für welche $\xi\eta\zeta$ in dem Bereiche $\sigma_1 \overline{\gtrless} \sigma \overline{\gtrless} \sigma_2$ eindeutige und stetige Funktionen von σ sind, ferner auch die Richtungskosinusse jedes Kurvenelementes $d\sigma$ an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$:

$$2)\quad \begin{cases} \cos(\sigma x) = \dfrac{d\xi}{d\sigma}, \\ \cos(\sigma y) = \dfrac{d\eta}{d\sigma}, \\ \cos(\sigma z) = \dfrac{d\zeta}{d\sigma} \end{cases}$$

als abteilungsweise monotone, eindeutige und stetige oder abteilungs-

weise eindeutige und stetige*) Funktionen von σ betrachtet werden können und endliche**) erste Ableitungen haben.

§ 3.

Es sei $f(\xi\eta\zeta)$ eine auf der Kurve $\sigma_1\,\sigma_2$ eindeutige und stetige Funktion der Stelle, und man wisse auch von ihren ersten Ableitungen, dass sie auf der Kurve $\sigma_1\,\sigma_2$ endlich**) (im allgemeinen eindeutig und stetig) sind; wir betrachten das Integral:

$$3)\quad J_\sigma = \int\limits_\sigma \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos(\sigma x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos(\sigma y) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos(\sigma z)\right\} d\sigma,$$

das über alle Elemente $d\sigma$ des Kurvenstückes $\sigma_1\,\sigma_2$ zu erstrecken ist. Setzen wir hierin aus 2) die Werte von

$$\cos(\sigma x),\quad \cos(\sigma y),\quad \cos(\sigma z)$$

ein, so folgt:

$$J_\sigma = \int\limits_\sigma \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{d\xi}{d\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{d\eta}{d\sigma} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{d\sigma}\right\} d\sigma,$$

$$= \int\limits_\sigma \frac{df}{d\sigma}\, d\sigma,$$

oder:

$$4)\quad J_\sigma = \left| f \right|_{\sigma_1}^{\sigma_2},$$

wenn wir unter dem Ausdruck rechts die Differenz:

Funktionswert an der Stelle σ_2
— Funktionswert an der Stelle σ_1

verstehen:

A. Ist f eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf einem gegebenen Kurvenstück σ, und weiſs man auch von ihren ersten Ableitungen, dass sie auf der Kurve endlich**) (im allgemeinen eindeutig und stetig) sind, so besteht die Formel:

$$5)\quad \int\limits_\sigma \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos(\sigma x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos(\sigma y) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos(\sigma z)\right\} d\sigma = \left| f \right|_{\sigma_1}^{\sigma_2},$$

*) In diesem Falle bezeichnen wir die Punkte, durch welche die Kurve in Stücke zerlegt wird, auf denen diese Funktionen eindeutig und stetig sind, als „die Trennungspunkte der stetig gekrümmten Kurventeile" und schlieſsen Spitzen in den Trennungspunkten aus.

**) Wir werden oft von einer endlichen Funktion sprechen, in dem strengen Sinne einer „im allgemeinen eindeutigen und stetigen" Funktion. Vgl. Definitionen S. 1, 9, 16.

wo, nach einer bestimmten Festsetzung über den Sinn der Richtung σ, σ_2 den positiven, σ_1 den negativen Randpunkt der Kurve vorstellt.

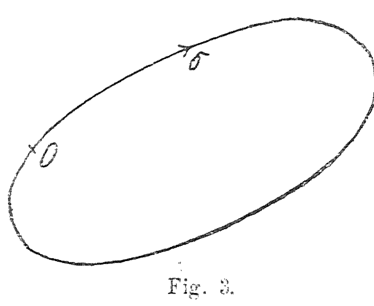


Fig. 3.

Wir wollen eine geschlossene Kurve stets als ein Kurvenstück betrachten, dessen positiver und negativer Randpunkt in einem beliebigen Punkte O der Kurve zusammenfallen.

Es ergiebt sich für solche geschlossene Kurven aus A. unmittelbar der folgende

Zusatz 1 zu A. Ist, bei denselben Voraussetzungen über die Funktion f, σ eine geschlossene Kurve, so ist:

$$6)\quad \int\limits_\sigma \left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\cos(\sigma x) + \frac{\partial f}{\partial \eta}\cos(\sigma y) + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\cos(\sigma z)\right\} d\sigma = 0.$$

§ 4.

Wir setzen im besonderen in 6) f successive gleich:

$$\begin{array}{ccc} \xi, & \eta, & \zeta, \\ \xi^2, & \eta^2, & \zeta^2, \\ \eta\zeta, & \zeta\xi, & \xi\eta, \end{array}$$

dann folgt:

$$7)\quad \left|\begin{array}{l} \int\limits_\sigma \cos(\sigma x)\, d\sigma = 0, \\ \int\limits_\sigma \cos(\sigma y)\, d\sigma = 0, \\ \int\limits_\sigma \cos(\sigma z)\, d\sigma = 0; \end{array}\right.$$

$$8)\quad \left|\begin{array}{l} \int\limits_\sigma \xi \cos(\sigma x)\, d\sigma = 0, \\ \int\limits_\sigma \eta \cos(\sigma y)\, d\sigma = 0, \\ \int\limits_\sigma \zeta \cos(\sigma z)\, d\sigma = 0; \end{array}\right.$$

$$
9)\quad \left|\begin{aligned}
&\int_\sigma \{\eta \cos(\sigma z) + \zeta \cos(\sigma y)\}\, d\sigma = 0,\\
&\int_\sigma \{\zeta \cos(\sigma x) + \xi \cos(\sigma z)\}\, d\sigma = 0,\\
&\int_\sigma \{\xi \cos(\sigma y) + \eta \cos(\sigma x)\}\, d\sigma = 0.
\end{aligned}\right.
$$

Wir denken uns weiter, unter Annahme eines positiven*) Koordinatensystems xyz, die geschlossene Kurve σ mit ihrer

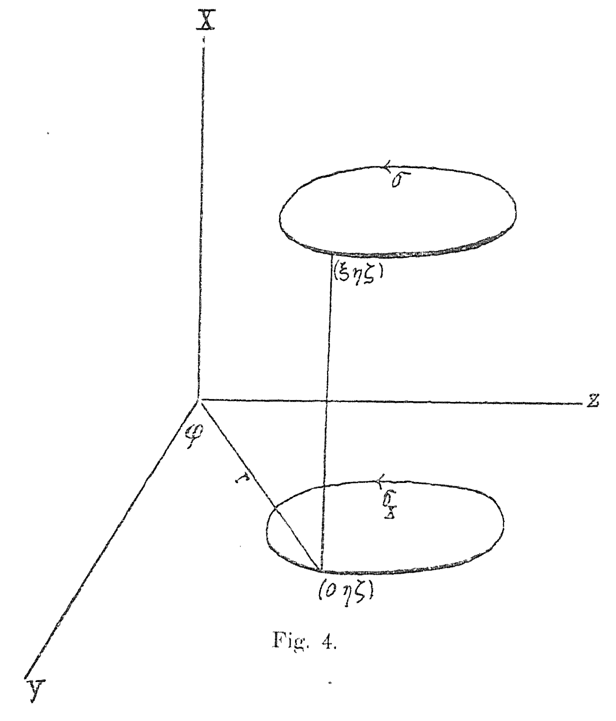


Fig. 4.

positiven Umlaufsrichtung auf die yz Ebene projiziert, so dass jedem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Kurve σ ein Punkt $(O\eta\zeta)$ der projizierten Kurve σ_x entspricht; wir setzen ferner:

*) d. i. ein solches, in welchem, von der positiven x Seite aus gesehen, die kürzeste Drehung von der y Axe zur z Axe im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers stattfindet.

$$10) \begin{cases} \eta = r \cos\varphi, \\ \zeta = r \sin\varphi, \end{cases}$$

so dass r die Entfernung des Punktes $(O\eta\zeta)$ vom Anfangspunkte, φ den Winkel, den die Richtung

$$\text{Anfangspunkt} \longrightarrow (O\eta\zeta)$$

mit der y Axe bildet, vorstellt, wobei φ, von der positiven x Seite aus gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers positiv zu rechnen ist. Es folgt aus 10):

$$d\eta = dr \cos\varphi - r \sin\varphi \, d\varphi,$$
$$d\zeta = dr \sin\varphi + r \cos\varphi \, d\varphi,$$

somit:

$$\eta \, d\zeta - \zeta \, d\eta = r^2 d\varphi,$$

oder:

$$\{\eta \cos(\sigma z) - \zeta \cos(\sigma y)\} \, d\sigma = r^2 d\varphi;$$

Summiren wir über alle Elemente $d\sigma$ der Kurve σ, so folgt:

$$11) \quad \int_\sigma \{\eta \cos(\sigma z) - \zeta \cos(\sigma y)\} \, d\sigma = \int_{\sigma_x} r^2 d\varphi.$$

Der Ausdruck rechts ist:

$$= \pm 2\omega_x,$$

wenn ω_x den Flächeninhalt der von σ_x begrenzten Fläche vorstellt, und es ist dabei das + oder − Zeichen zu wählen, je nachdem die Umlaufsrichtung von σ_x, von der positiven x Seite gesehen, den umgekehrten Sinn oder den Sinn des Uhrzeigers hat, oder — wie man sich kurz ausdrückt — je nachdem die Umlaufsrichtung von σ_x positiv oder negativ ist. Es ist also:

$$\text{analog:} \quad 12) \begin{cases} \int_\sigma \{\eta \cos(\sigma z) - \zeta \cos(\sigma y)\} \, d\sigma = \pm 2\omega_x, \\ \int_\sigma \{\zeta \cos(\sigma x) - \xi \cos(\sigma z)\} \, d\sigma = \pm 2\omega_y, \\ \int_\sigma \{\xi \cos(\sigma y) - \eta \cos(\sigma x)\} \, d\sigma = \pm 2\omega_z, \end{cases}$$

wo $\omega_x \, \omega_y \, \omega_z$ resp. die Flächenräume vorstellen, welche von den Projektionen $\sigma_x \, \sigma_y \, \sigma_z$ der Kurve σ resp. auf die yz, zx, xy Ebene

umschlossen werden und das + oder — Zeichen zu wählen ist, je nachdem die Umlaufsrichtungen dieser Projektionen positiv oder negativ sind.

Wir wollen die Formeln 7), 8) und die durch Addition und Subtraktion der Formeln 9) und 12) sich ergebenden Relationen als einen besonderen Zusatz zu A. aussprechen:

Zusatz 2 zu A. Es bestehen für jede geschlossene Kurve σ die Formeln:

$$13)\quad \begin{cases} \int\limits_\sigma \cos(\sigma x)\, d\sigma = \int\limits_\sigma \cos(\sigma y)\, d\sigma = \int\limits_\sigma \cos(\sigma z)\, d\sigma = 0; \\ \int\limits_\sigma \xi \cos(\sigma x)\, d\sigma = \int\limits_\sigma \eta \cos(\sigma y)\, d\sigma = \int\limits_\sigma \zeta \cos(\sigma z)\, d\sigma = 0; \\ \int\limits_\sigma \eta \cos(\sigma z)\, d\sigma = -\int\limits_\sigma \zeta \cos(\sigma y)\, d\sigma = \pm\, \omega_x, \\ \int\limits_\sigma \zeta \cos(\sigma x)\, d\sigma = -\int\limits_\sigma \xi \cos(\sigma z)\, d\sigma = \pm\, \omega_y, \\ \int\limits_\sigma \xi \cos(\sigma y)\, d\sigma = -\int\limits_\sigma \eta \cos(\sigma x)\, d\sigma = \pm\, \omega_z; \end{cases}$$

dabei sind $\omega_x\, \omega_y\, \omega_z$ die Flächenräume, welche von den Projektionen $\sigma_x \sigma_y \sigma_z$ der Kurve σ auf die yz, zx, xy Ebene umschlossen werden, und es sind die + oder — Zeichen zu wählen, je nachdem die Umlaufsrichtungen dieser Projektionen positiv oder negativ sind.

2. Kapitel.

Über Oberflächenintegrale.

§ 1.

Wir denken uns eine Oberfläche durch eine Gleichung:

$$14)\quad f(\xi \eta \zeta) = 0$$

gegeben und auf derselben durch eine geschlossene Kurve σ ein bestimmtes Flächenstück ω abgegrenzt.

Wir werden uns stets auf Oberflächenstücke ω beschränken,

für welche f eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle ist, ferner auch die Richtungskosinusse der Normalen:

$$
15)\quad \left|\begin{aligned}
\cos(\nu x) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}},\\
\cos(\nu y) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \eta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}},\\
\cos(\nu z) &= \frac{\frac{\partial f}{\partial \zeta}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial \zeta}\right)^2}}
\end{aligned}\right.
$$

bei Zugrundelegung eines festen Zeichens der Quadratwurzel als abteilungsweise monotone, eindeutige und stetige oder abteilungsweise eindeutige und stetige*) Funktionen der Stelle auf ω betrachtet werden können und endliche**) erste Ableitungen haben.

Die Stetigkeitsdefinitionen lauten analog Kapitel 1, § 1:

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf dem Oberflächenstücke ω heifst eindeutig und stetig, falls dieselbe für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ von ω einen und nur einen bestimmten endlichen Wert besitzt und die Differenz:

$$F(\xi + \delta\xi,\ \eta + \delta\eta,\ \zeta + \delta\zeta) - F(\xi,\ \eta,\ \zeta)$$

für zwei Punkte $(\xi\eta\zeta)$ und $(\xi + \delta\xi\ \ \eta + \delta\eta\ \ \zeta + \delta\zeta)$ des Flächenstückes ω durch Verkleinerung von

$$\sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2}$$

unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden kann.

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf dem Oberflächenstück ω heifst abteilungsweise eindeutig und stetig, falls sich ω in eine endliche Anzahl von Flächenstücken zerlegen lässt, auf denen die Funktion eindeutig und stetig ist.

*) In diesem Falle bezeichnen wir die Kurven, durch welche die Fläche in Stücke zerlegt wird, auf denen diese Funktionen eindeutig und stetig sind, als „die Trennungskurven der stetig gekrümmten Flächenteile“ und schliefsen Spitzen in den Trennungskurven (Zusammentreffen von Flächenteilen unter dem Winkel null) aus.

**) Vgl. Anm. 2, S. 3.

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf dem Oberflächenstück ω heifst im allgemeinen eindeutig und stetig, falls die Gesamtgröfse der Teilflächen, auf welchen die Funktion den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit nicht entspricht, kleiner ist als ein beliebig klein gewählter Flächenraum, und falls der Funktionswert für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ des Flächenstückes kleiner ist als irgend ein bestimmter, endlicher Wert.

Die Funktion F heifst auf ω abteilungsweise monoton, falls sie auf jedem endlichen, auf ω gelegenen Kurvenstück abteilungsweise monoton ist.

§ 2.

Von den beiden Seiten des Flächenstückes ω können wir nach Belieben die eine oder die andere als die positive Seite festsetzen; nach dieser Festsetzung bezeichnen wir die in einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ nach der positiven Seite der Fläche gehende Normale als die positive Normale ν der Fläche in $(\xi\eta\zeta)$. Wir können z. B. die positive Seite der Fläche 14) dadurch unzweideutig festsetzen, dass wir der positiven Normalen ν in $(\xi\eta\zeta)$ die Richtungskosinusse $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ geben, wie sie durch die Gleichungen 15) bestimmt sind, unter Zugrundelegung des positiven Zeichens für die Quadratwurzel.

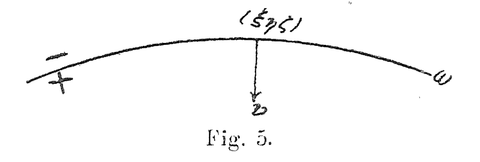


Fig. 5.

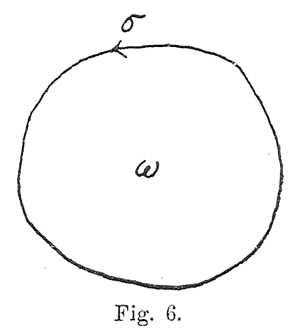


Fig. 6.

Nach dieser Festsetzung geben wir auch der Randkurve σ des Flächenstückes ω eine bestimmte positive Umlaufsrichtung, indem wir festsetzen, dass eine menschliche Figur, welche in der positiven σ Richtung schwimmt und nach der negativen Seite von ω hinblickt, das Flächenstück ω stets zur Linken haben soll.*)

§ 3.

Es seien

$$U(\xi\eta\zeta),\quad V(\xi\eta\zeta),\quad W(\xi\eta\zeta)$$

drei auf dem Flächenstücke ω eindeutige und stetige Funktionen,

---

*) z. B. wird in Fig. 6, falls ω in die Ebene der Zeichnung fällt und die positive Normale von ω nach vorn heraustritt, die positive Umlaufsrichtung von σ durch den angegebenen Pfeil markiert.

und man wisse auch von ihren ersten Ableitungen dass sie auf dem Flächenstücke endlich (im allgemeinen eindeutig und stetig) sind. Wir wollen zusehen, ob wir das Integral:

$$16)\quad J_2 = \int_\omega \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\cos(\nu z)\right\} d\omega.$$

das über alle Elemente $d\omega$ des Flächenstückes ω zu erstrecken ist, in ein über die Randkurve σ zu erstreckendes Kurvenintegral verwandeln können.

Wir denken uns auf beliebige Weise das Flächenstück ω in eine grofse Anzahl kleinerer Flächenstücke $d\omega$ zerschnitten, deren Randkurven mit ihren positiven Umlaufsrichtungen wir mit ς bezeichnen. Wir greifen ein solches $d\omega$ heraus und markieren beliebig innerhalb desselben einen Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$. Bei unseren Voraussetzungen können wir, sobald wir $d\omega$ genügend klein nehmen, die Funktion U z. B. für einen Punkt $(\xi \eta \zeta)$ der Kurve ς in der folgenden Form darstellen:

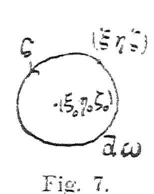


Fig. 7.

$$U = U_0 + (\xi - \xi_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|_0 + (\eta - \eta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_0 + (\zeta - \zeta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|_0 + \Delta, (^1)$$

wo der Index $_0$ andeuten soll, dass die Werte der betreffenden Funktionen im Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zu wählen sind. Die Gröfse Δ ist ihrem absoluten Werte nach

$$\leqq r \cdot D, (^1)$$

wo r die Entfernung:

$$(\xi_0 \eta_0 \zeta_0) \longrightarrow (\xi \eta \zeta)$$

und D die gröfste Differenz vorstellt, welche die ersten Ableitungen von U innerhalb $d\omega$ haben können.

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit

$$\cos(\varsigma x)\, d\varsigma$$

und integrieren über die Kurve ς, dann folgt:

$$\int_\varsigma U \cos(\varsigma x)\, d\varsigma = \int_\varsigma \left\{ U_0 + (\xi - \xi_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|_0 + (\eta - \eta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_0 + (\zeta - \zeta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|_0 \right\} \cos(\varsigma x)\, d\varsigma + \int_\varsigma \Delta \cos(\varsigma x)\, d\varsigma,$$

und man kann durch geeignete Wahl der $d\omega$ das letzte Glied rechts stets seinem absoluten Werte nach

$$\lesseqgtr A \cdot D \cdot d\omega$$

machen, wo A eine endliche Zahl vorstellt.(²)

Wir bringen jetzt die in Zusatz 2 zu A ausgesprochenen Formeln zur Anwendung; es ist nach denselben:

$$\int\limits_{\varsigma}\left\{U_0 + (\xi - \xi_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|_0 + (\eta - \eta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_0 + (\zeta - \zeta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|_0\right\}\cos(\varsigma x)\, d\varsigma$$
$$= \left|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|_0 (\pm\, d\omega_y) - \left|\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_0 (\pm\, d\omega_z),$$

wo wir mit $d\omega_y\, d\omega_z$ die Projektionen von $d\omega$ resp. auf die zx und xy Ebene bezeichnen und das + oder — Zeichen zu wählen haben, je nachdem den projizierten Kurven $\varsigma_y\, \varsigma_z$ eine positive oder negative Umlaufsrichtung zukommt. Setzen wir dies in der vorangehenden Gleichung ein und summieren über alle $d\omega$ von ω, so folgt im Grenzfalle, indem wir die $d\omega$ immer kleiner und kleiner machen:

$$\int\limits_{\sigma} U\cos(\sigma x)\, d\sigma = \int\limits_{\omega}\left[\frac{\partial U}{\partial \zeta}(\pm\, d\omega_y) - \frac{\partial U}{\partial \eta}(\pm\, d\omega_z)\right],$$

wo nunmehr:

$$d\omega_y = \pm\, d\omega \cos(\nu y),$$
$$d\omega_z = \pm\, d\omega \cos(\nu z),$$

bei Zugrundelegung des + oder — Zeichens, je nachdem wiederum die Projektionen der Randkurve des Elementes $d\omega$ positive oder negative Umlaufsrichtungen haben. Es ist also:

analog:

17)
$$\left\{\begin{aligned}
\int\limits_{\sigma} U\cos(\sigma x)\, d\sigma &= \int\limits_{\omega}\left\{\frac{\partial U}{\partial \zeta}\cos(\nu y) - \frac{\partial U}{\partial \eta}\cos(\nu z)\right\} d\omega,\\
\int\limits_{\sigma} V\cos(\sigma y)\, d\sigma &= \int\limits_{\omega}\left\{\frac{\partial V}{\partial \xi}\cos(\nu z) - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\cos(\nu x)\right\} d\omega,\\
\int\limits_{\sigma} W\cos)\sigma z)\, d\sigma &= \int\limits_{\omega}\left\{\frac{\partial W}{\partial \eta}\cos(\nu x) - \frac{\partial W}{\partial \xi}\cos(\nu y)\right\} d\omega.
\end{aligned}\right.$$

Durch Addition dieser drei Formeln folgt:

$$18)\quad \int_{\sigma} \{ U\cos(\sigma x) + V\cos(\sigma y) + W\cos(\sigma z)\}\, d\sigma = J_{\omega},$$

wo J_{ω} das durch 16) definierte Oberflächenintegral vorstellt.

Wir erhalten so den Satz:

B. (Theorem von Stokes). Sind U, V, W drei eindeutige und stetige Funktionen der Stelle ($\xi\eta\zeta$) auf einem gegebenen Flächenstücke ω, und weifs man auch von ihren ersten Ableitungen, dass sie auf dem Flächenstücke endlich*) (im allgemeinen eindeutig und stetig) sind, so besteht die Formel:

$$19)\quad \int_{\omega} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\cos(\nu z)\right\} d\omega,$$
$$= \int_{\sigma} \{ U\cos(\sigma x) + V\cos(\sigma y) + W\cos(\sigma z)\}\, d\sigma,$$

wo das Integral links über alle Elemente $d\omega$ (mit den positiven Normalen ν) des Flächenstückes ω, das Integral rechts über alle Elemente $d\sigma$ der Randkurve σ von ω zu erstreken ist.

Der Satz gilt in gleicher Weise, mögen U, V, W lediglich Funktionen der Stelle auf der Fläche ω oder Funktionen der Stelle ($\xi\eta\zeta$) im Raume sein, falls wir nur in letzterem Falle über die Randwerte der Funktionen an der Fläche und über ihre tangentialen Ableitungen daselbst die Voraussetzungen des Satzes B machen.(³)

Für geschlossene Flächen ω ergiebt sich aus B. der folgende

Zusatz 1 zu B. Ist, bei denselben Voraussetzungen über die Funktionen U, V, W, ω eine geschlossene Fläche, so ist:

$$20)\quad \int_{\omega} \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\cos(\nu z)\right\} d\omega = 0.$$

Denn wir können uns durch eine Kurve σ die Fläche ω in zwei Flächenstücke $\omega_1\,\omega_2$ zerlegt denken, dann sind beide Teile des Integrales 20) gleich

*) S. Anm. 2, S. 3.

$$\int\limits_{\sigma} \{U \cos(\sigma x) + V \cos(\sigma y) + W \cos(\sigma z)\} \, d\sigma;$$

in dem einen Falle ist aber nach ihrer Definition die Umlaufsrichtung von σ im entgegengesetzten Sinne zu nehmen, als in dem anderen, die Summe der beiden Teilintegrale ist somit null.

§ 4.

Wir setzen im besonderen in 20) successive:

$$\begin{array}{lll} U = 0, & V = -\zeta, & W = \eta, \\ U = \zeta, & V = 0, & W = -\xi, \\ U = -\eta, & V = \xi, & W = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll|lll} U = \zeta^2, & V = 0, & W = 0, & U = 0, & V = 0, & W = \xi^2, \\ U = 0, & V = \xi^2, & W = 0, & U = \eta^2, & V = 0, & W = 0, \\ U = 0, & V = 0, & W = \eta^2, & U = 0, & V = \zeta^2, & W = 0; \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} U = \eta\zeta, & V = 0, & W = 0, \\ U = 0, & V = \zeta\xi, & W = 0, \\ U = 0, & V = 0, & W = \xi\eta; \end{array}$$

dann folgt:

$$21) \begin{cases} \int\limits_{\omega} \cos(\nu x) \, d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega} \cos(\nu y) \, d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega} \cos(\nu z) \, d\omega = 0; \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \int\limits_{\omega} \zeta \cos(\nu y) \, d\omega = \int\limits_{\omega} \eta \cos(\nu z) \, d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega} \xi \cos(\nu z) \, d\omega = \int\limits_{\omega} \zeta \cos(\nu x) \, d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega} \eta \cos(\nu x) \, d\omega = \int\limits_{\omega} \xi \cos(\nu y) \, d\omega = 0; \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \int\limits_{\omega} \{\eta \cos(\nu y) - \zeta \cos(\nu z)\} d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega} \{\zeta \cos(\nu z) - \xi \cos(\nu x)\} d\omega = 0, \\ \int\limits_{\omega} \{\xi \cos(\nu x) - \eta \cos(\nu y)\} d\omega = 0. \end{cases}$$

Bezeichnen wir ferner die Entfernung und Richtung:

Anfangspunkt —> $d\omega$

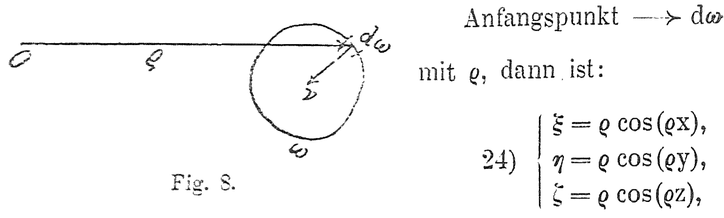


Fig. 8.

mit ϱ, dann ist:

$$24) \begin{cases} \xi = \varrho \cos(\varrho x), \\ \eta = \varrho \cos(\varrho y), \\ \zeta = \varrho \cos(\varrho z), \end{cases}$$

somit:

$$25) \int\limits_{\omega} \{\xi \cos(\nu x) + \eta \cos(\nu y) + \zeta \cos(\nu z)\} d\omega = \int\limits_{\omega} \varrho \cos(\varrho \nu) \, d\omega.$$

Der Ausdruck rechts ist:

$$= \pm 3\tau,$$

wenn τ das von der Fläche ω umschlossene Volumen vorstellt, und es ist dabei das + oder — Zeichen zu wählen, je nachdem als positive Seite der Fläche ω die äufsere oder innere Seite derselben gewählt wird. In dem zweiten Falle, wenn wir also mit ν die inneren Normalen von $d\omega$ bezeichnen, ist somit:

$$26) \int\limits_{\omega} \{\xi \cos(\nu x) + \eta \cos(\nu y) + \zeta \cos(\nu z)\} d\omega = -3\tau.$$

Wir wollen die Formeln 21), 22) und die durch Kombination der Formeln 23) und 26) sich ergebenden Relationen als einen besonderen Zusatz zu B. aussprechen:

Zusatz 2 zu B. Es bestehen für jede geschlossene Fläche ω die Formeln:

$$27)\left\{\begin{array}{l}
\int\limits_{\omega} \cos(\nu x)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \cos(\nu y)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \cos(\nu z)\, d\omega = 0; \\
\int\limits_{\omega} \zeta \cos(\nu y)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \eta \cos(\nu z)\, d\omega = 0, \\
\int\limits_{\omega} \xi \cos(\nu z)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \zeta \cos(\nu x)\, d\omega = 0, \\
\int\limits_{\omega} \eta \cos(\nu x)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \xi \cos(\nu y)\, d\omega = 0; \\
\int\limits_{\omega} \xi \cos(\nu x)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \eta \cos(\nu y)\, d\omega = \int\limits_{\omega} \zeta \cos(\nu z)\, d\omega = -\tau;
\end{array}\right.$$

dabei bezeichnet τ das von der Fläche ω eingeschlossene Volumen und $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ die Richtungskosinusse der inneren Normalen von $d\omega$.

3. Kapitel.

Über Raumintegrale.

§ 1.

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ heifst in einem Raumgebiete τ eindeutig und stetig, falls dieselbe für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ von τ einen und nur einen bestimmten endlichen Wert besitzt und die Differenz

$$F(\xi + \delta\xi,\ \eta + \delta\eta,\ \zeta + \delta\zeta) - F(\xi,\ \eta,\ \zeta)$$

für zwei Punkte $(\xi\eta\zeta)$ und $(\xi + \delta\xi\ \ \eta + \delta\eta\ \ \zeta + \delta\zeta)$ des Raumes τ durch Verkleinerung von

$$\sqrt{\delta\xi^2 + \delta\eta^2 + \delta\zeta^2}$$

unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden kann.

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ heifst in einem Raumgebiete τ abteilungsweise eindeutig und stetig, falls sich τ in eine endliche Anzahl von Räumen zerlegen lässt, in denen die Funktion eindeutig und stetig ist.

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ heifst in einem Raumgebiete τ im allgemeinen eindeutig und stetig, falls die Gesamtgröfse der Teilräume, in denen die Funktion den Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit nicht entspricht, kleiner ist, als ein beliebig klein gewähltes Volumen, und falls der Funktionswert für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ des Raumes kleiner ist, als ein bestimmter endlicher Wert.

Eine Funktion F der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ heifst innerhalb eines Raumes τ eindeutig und stetig oder abteilungsweise eindeutig und stetig, wenn die Bedingungen der Eindeutigkeit und Stetigkeit oder abteilungsweisen Eindeutigkeit und Stetigkeit für jeden Raum gelten, dessen Oberfläche ganz innerhalb der Oberfläche von τ liegt, von dieser aber durch endliche, im übrigen beliebig kleine Entfernungen getrennt ist.

§ 2.

Es seien

$$U(\xi\eta\zeta),\quad V(\xi\eta\zeta),\quad W(\xi\eta\zeta)$$

drei in dem Raume τ eindeutige und stetige Funktionen, und man wisse auch von ihren ersten Ableitungen, dass sie in dem Raume τ endlich (im allgemeinen eindeutig und stetig) sind. Wir wollen zusehen, ob wir das Integral:

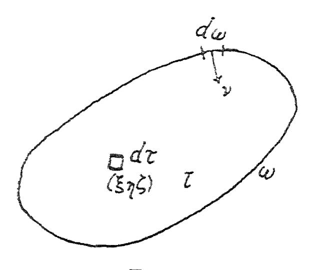


Fig. 9.

$$28)\quad J_\tau = \int_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\right) d\tau,$$

das über alle Elemente $d\tau$ des Raumes τ zu erstrecken ist, nicht in ein über die Oberfläche ω von τ zu erstreckendes Oberflächenintegral verwandeln können.

Wir denken uns auf beliebige Weise den Raum τ in eine grofse Anzahl kleiner Räume $d\tau$ zerschnitten, deren Oberflächen wir mit o bezeichnen. Wir greifen ein solches $d\tau$ heraus und markieren beliebig innerhalb desselben einen Punkt $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$. Bei unseren Voraussetzungen können wir, sobald wir $d\tau$ genügend klein nehmen, die Funktion U z. B. für einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Oberfläche o in der folgenden Form darstellen:

$$U = U_0 + (\xi - \xi_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \xi}\right|_0 + (\eta - \eta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \eta}\right|_0 + (\zeta - \zeta_0)\left|\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right|_0 + \varDelta,$$

wo der Index $_0$ andeuten soll, dass die Werte der betreffenden

Funktionen im Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zu wählen sind. Die Gröfse $\varDelta$ ist ihrem absoluten Werte nach

$$\overline{\leqq}\, r \cdot D,$$

wo r die Entfernung:

$$(\xi_0 \eta_0 \zeta_0) \longrightarrow (\xi \eta \zeta)$$

und D die gröfste Differenz vorstellt, welche die ersten Ableitungen von U innerhalb $d\tau$ haben können.

Fig. 10.

Wir multiplizieren die letzte Gleichung mit

$$\cos(\nu x)\, do,$$

wo do ein Element der Fläche o mit der inneren Normalen ν vorstellt, und integrieren über die Fläche o, dann ist:

$$\int\limits_{o} U \cos(\nu x)\, do = \int\limits_{o} \left\{ U_0 + (\xi - \xi_0) \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_0 + (\eta - \eta_0) \left| \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|_0 + (\zeta - \zeta_0) \left| \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right|_0 \right\} \cos(\nu x)\, do + \int\limits_{o} \varDelta \cos(\nu x)\, do,$$

und man kann durch geeignete Wahl der $d\tau$ das letzte Glied rechts stets seinem absoluten Werte nach

$$\overline{\leqq}\, A \cdot D \cdot d\tau$$

machen, wo A eine endliche Zahl vorstellt.(4)

Wir bringen jetzt die in Zusatz 2 zu B. ausgesprochenen Formeln in Anwendung; es ist nach denselben:

$$\int\limits_{o} \left\{ U_0 + (\xi - \xi_0) \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_0 + (\eta - \eta_0) \left| \frac{\partial U}{\partial \eta} \right|_0 + (\zeta - \zeta_0) \left| \frac{\partial U}{\partial \zeta} \right|_0 \right\} \cos(\nu x)\, do = - \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right|_0 d\tau.$$

Setzen wir dies in der vorangehenden Gleichung ein und summieren über alle $d\tau$ von τ, so folgt im Grenzfalle, indem wir die $d\tau$ immer kleiner und kleiner machen:

analog:

$$29)\quad \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{\omega} U \cos(\nu x)\, d\omega = - \int\limits_{\tau} \frac{\partial U}{\partial \xi}\, d\tau, \\ \displaystyle\int\limits_{\omega} V \cos(\nu y)\, d\omega = - \int\limits_{\tau} \frac{\partial V}{\partial \eta}\, d\tau, \\ \displaystyle\int\limits_{\omega} W \cos(\nu z)\, d\omega = - \int\limits_{\tau} \frac{\partial W}{\partial \zeta}\, d\tau, \end{cases}$$

und hieraus durch Addition:

$$30)\quad \int\limits_{\omega} \{U \cos(\nu x) + V \cos(\nu y) + W \cos(\nu z)\} \, d\omega = - J_{\tau},$$

wo J_{τ} das durch 28) definierte Raumintegral vorstellt.

Wir erhalten so den Satz:

C. (Theorem von Green). Sind U, V, W drei Funktionen der Stelle, die in einem gegebenen Raumgebiete τ eindeutig und stetig sind, und weiſs man auch von ihren ersten Ableitungen, dass sie in dem Raumgebiete endlich*) (im allgemeinen eindeutig und stetig) sind, so besteht die Formel:

$$31)\quad \int\limits_{\tau} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial W}{\partial \zeta}\right) d\tau = - \int\limits_{\omega} \{U \cos(\nu x) + V \cos(\nu y) + W \cos(\nu z)\} \, d\omega,$$

wo das Integral links über alle Elemente $d\tau$ des Raumes τ, das Integral rechts über alle Elemente $d\omega$ (mit den inneren Normalen ν) der Oberfläche ω von τ zu erstrecken ist.

---

*) S. Anm. 2, S. 3.

I. Teil.

Allgemeine Theorie des Potentials.

I. Abschnitt.

Über die vier Potentialarten und Eigenschaften, die allen gemeinsam sind.

1. Kapitel.

Die vier Arten des Potentials.

Wir unterscheiden vier Arten des Potentials, die wir in folgender Weise definieren:

a) Das Punktpotential eines Punktes $(\xi\eta\zeta)$:

1) $V = \frac{\varepsilon}{r}$,

$(\xi\eta\zeta)$ r (xyz)

Fig. 11.

wo ε eine Konstante, r die Entfernung eines variablen Punktes (xyz) von dem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ vorstellt.

b) Das Kurvenpotential einer Kurve σ:

2) $V = \int\limits_\sigma \frac{\Sigma d\sigma}{r}$,

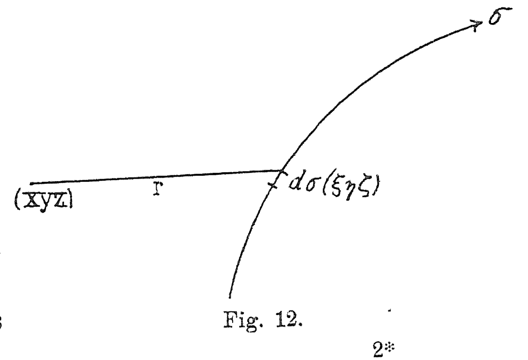


Fig. 12.

wo $d\sigma$ ein Element der Kurve an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, Σ eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf der Kurve, r die Entfernung eines

variabeln Punktes (xyz) von dem Elemente $d\sigma$ vorstellt und das Integral über alle Elemente der Kurve σ zu erstrecken ist.

c) Das Flächenpotential einer Fläche ω:

$$3)\quad V = \int\limits_{\omega} \frac{H d\omega}{r},$$

wo $d\omega$ ein Element der Fläche ω an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, H eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf der Fläche, r die Entfernung eines variablen Punktes (xyz) von dem Elemente $d\omega$ vorstellt und das Integral über alle Elemente der Fläche ω zu erstrecken ist.

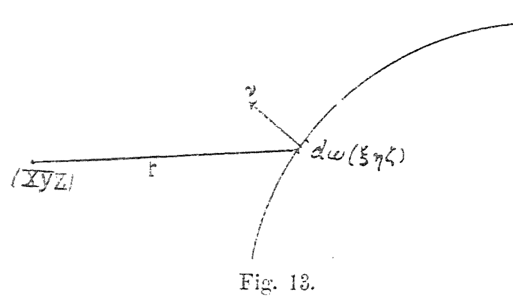


Fig. 13.

d) Das Raumpotential eines Raumgebietes τ:

$$4)\quad V = \int\limits_{\tau} \frac{E d\tau}{r},$$

wo $d\tau$ ein Element des Raumes τ an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, E eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, r die Entfernung eines variablen Punktes (xyz) von dem Elemente $d\tau$ vorstellt und das Integral über alle Elemente des Raumes τ zu erstrecken ist.

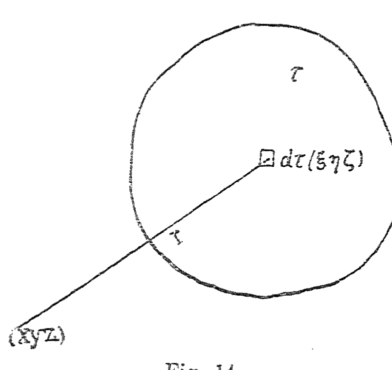


Fig. 14.

Irgend ein Potential V soll sich aus einer endlichen Anzahl von Punktpotentialen und Potentialen endlicher Kurven, Flächen und Räume in beliebiger Weise additiv zusammensetzen.

2. Kapitel.

Über Eigenschaften, die allen Potentialen gemeinsam sind.

§ 1.

Der Abstand r zweier Punkte (xyz) und ($\xi\eta\zeta$) ist durch die Formel gegeben:

$$5)\quad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2};$$

es ist somit r eine Funktion von (xyz), welche überall eindeutig und stetig ist und im Punkte ($\xi\eta\zeta$) verschwindet. Es ist folglich die Funktion

$$\frac{1}{r}$$

von (xyz) für alle Punkte (xyz) endlich, welche in endlicher Entfernung von ($\xi\eta\zeta$) liegen, und sie ist eindeutig und stetig für jeden Punkt (xyz), welcher von ($\xi\eta\zeta$) durch irgend welche (im übrigen auch beliebig kleine) Entfernung getrennt ist.

Dasselbe gilt genau, wie für die Funktion $\frac{1}{r}$, auch für alle hre Ableitungen nach x, y, z. Aus dieser Eigenschaft der Funktion $\frac{1}{r}$ und ihrer Ableitungen folgt die nachstehende allen Potentialarten gemeinsamen Eigenschaft:

Ia) Ein jedes Potential V (xyz) ist mit allen seinen Ableitungen nach x, y, z in jedem Punkte (xyz) endlich, der von den Punkten, Kurven, Flächen oder Räumen, als deren Potential V gegeben ist, eine endliche Entfernung hat; es ist ferner mit allen seinen Ableitungen nach x, y, z in jedem Punkte (xyz) stetig, der von den Punkten, Kurven, Flächen oder Räumen, als deren Potential V gegeben ist, durch irgend welche (im übrigen auch beliebig kleine) Entfernung getrennt ist.

§ 2.

Aus der Formel 5) folgt durch einmalige und zweimalige Differentiation nach x, y, z, ξ, η, ζ, wenn wir unter

Fig. 15.

$$\cos(rx),\quad \cos(ry),\quad \cos(rz)$$

stets die Richtungskosinusse der Richtung:

$$(\xi\,\eta\,\zeta) \longrightarrow (x\,y\,z)$$

verstehen:

$$6)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial r}{\partial x} = -\dfrac{\partial r}{\partial \xi} = \dfrac{x-\xi}{r} = \cos(rx), \\ \dfrac{\partial r}{\partial y} = -\dfrac{\partial r}{\partial \eta} = \dfrac{y-\eta}{r} = \cos(ry), \\ \dfrac{\partial r}{\partial z} = -\dfrac{\partial r}{\partial \zeta} = \dfrac{z-\zeta}{r} = \cos(rz); \end{cases}$$

$$7\,a)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\{\cos(rx)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \xi}\{\cos(rx)\} = \dfrac{1-\cos^2(rx)}{r}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\{\cos(rx)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \eta}\{\cos(rx)\} = -\dfrac{\cos(rx)\,\cos(ry)}{r}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\{\cos(rx)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\{\cos(rx)\} = -\dfrac{\cos(rx)\,\cos(rz)}{r}; \end{cases}$$

$$7\,b)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\{\cos(ry)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \xi}\{\cos(ry)\} = -\dfrac{\cos(rx)\,\cos(ry)}{r}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\{\cos(ry)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \eta}\{\cos(ry)\} = \dfrac{1-\cos^2(ry)}{r}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\{\cos(ry)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\{\cos(ry)\} = -\dfrac{\cos(ry)\,\cos(rz)}{r}; \end{cases}$$

$$7\,c)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial x}\{\cos(rz)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \xi}\{\cos(rz)\} = -\dfrac{\cos(rz)\,\cos(rx)}{r}, \\ \dfrac{\partial}{\partial y}\{\cos(rz)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \eta}\{\cos(rz)\} = -\dfrac{\cos(ry)\,\cos(rz)}{r}, \\ \dfrac{\partial}{\partial z}\{\cos(rz)\} = -\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\{\cos(rz)\} = \dfrac{1-\cos^2(rz)}{r}. \end{cases}$$

Von diesen einfachen Formeln werden wir in der Folge außerordentlich oft Gebrauch machen. Es folgt mit Hilfe derselben successive:

$$8)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial x} = -\dfrac{\cos(rx)}{r^2}, \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial y} = -\dfrac{\cos(ry)}{r^2}, \\ \dfrac{\partial\left(\dfrac{1}{r}\right)}{\partial z} = -\dfrac{\cos(rz)}{r^2}; \end{cases}$$

$$9)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} &= \frac{3\cos^2(rx)-1}{r^3}, \\ \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} &= \frac{3\cos^2(ry)-1}{r^3}, \\ \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} &= \frac{3\cos^2(rz)-1}{r^3}. \end{aligned}\right.$$

Durch Addition der drei Formeln 9) ergiebt sich:

$$10)\quad \Delta\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial z^2} = 0.$$

Die Formel gilt für jeden Punkt (x y z) des Raumes, der von $(\xi\eta\zeta)$ durch irgend welche (auch unendlich kleine) Entfernung getrennt ist, und infolge dieser Thatsache können wir eine weitere allgemeine Eigenschaft aller Potentiale angeben:

Ib) Ein jedes Potential V (x y z) erfüllt die (sogenannte Laplace'sche) Differentialgleichung:

$$11)\quad \Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

für jeden Punkt (xyz), der von den Punkten, Kurven, Flächen oder Räumen, als deren Potential V gegeben ist, durch irgend welche (auch unendlich kleine) Entfernung getrennt ist.

§ 3.

Es sei:

$$12)\quad V_j = \frac{\varepsilon_j}{r_j}$$

das Punktpotential irgend eines Punktes $(\xi_j \eta_j \zeta_j)$; wir nennen P, ϱ_j die Entfernungen der Punkte (xyz) und $(\xi_j \eta_j \zeta_j)$ vom Anfangspunkte O des Koordinatensystems und γ_j den Winkel, den die Richtungen $O \longrightarrow (xyz)$ und $O \longrightarrow (\xi_j \eta_j \zeta_j)$ mit einander einschliefsen, dann ist:

Fig. 16.

$$13)\quad r_j = \sqrt{P^2 - 2P\varrho_j \cos\gamma_j + \varrho_j^2},$$

somit:

$$14)\quad \begin{cases} V_j = \dfrac{\varepsilon_j}{P} \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\dfrac{\varrho_j}{P}\cos\gamma_j + \dfrac{\varrho_j^2}{P^2}}}, \\[2ex] V_j P = \varepsilon_j \dfrac{1}{\sqrt{1 - 2\dfrac{\varrho_j}{P}\cos\gamma_j + \dfrac{\varrho_j^2}{P^2}}}. \end{cases}$$

Aus diesen Formeln 14) ergiebt sich, wenn wir den Punkt (xyz) ins Unendliche wandern, d. h. wenn wir P unendlich wachsen lassen:

$$15)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=\infty} V_j = 0, \\ \lim\limits_{P=\infty} P V_j = \varepsilon_j. \end{cases}$$

Ist V das Potential einer beliebigen Anzahl von Punkten $(\xi_j\, \eta_j\, \zeta_j)$, so folgt analog:

$$16)\quad \begin{cases} V = \dfrac{1}{P} \sum_j \dfrac{\varepsilon_j}{\sqrt{1 - 2\dfrac{\varrho_j}{P}\cos\gamma_j + \dfrac{\varrho_j^2}{P^2}}}, \\[2ex] PV = \sum_j \dfrac{\varepsilon_j}{\sqrt{1 - 2\dfrac{\varrho_j}{P}\cos\gamma_j + \dfrac{\varrho_j^2}{P^2}}}, \end{cases}$$

somit:

$$17)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=\infty} V = 0, \\ \lim\limits_{P=\infty} PV = \sum_j \varepsilon_j. \end{cases}$$

Diese Formeln stellen eine weitere, allen Potentialen gemeinsame Eigenschaften dar:

Ic) I s t P d i e E n t f e r n u n g d e s v a r i a b l e n P u n k t e s v o n e i n e m i m E n d l i c h e n g e l e g e n e n P u n k t e, s o g e l t e n f ü r j e d e s P o t e n t i a l V d i e F o r m e l n:

$$18)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=\infty} V = 0, \\ \lim\limits_{P=\infty} PV = M, \end{cases}$$

w o M e i n e e n d l i c h e K o n s t a n t e v o r s t e l l t.

II. Abschnitt.

Die Eigenschaften der einzelnen Potentialarten im besonderen.

1. Kapitel.

Das Punktpotential und das Kurvenpotential.

§ 1.

Für das Punktpotential interessiert uns aufser den allgemeinen Potential-Eigenschaften nur der unmittelbar einleuchtende Satz:

IIa) Das Punktpotential eines Punktes $(\xi\eta\zeta)$:

$$19)\quad V = \frac{\varepsilon}{r}$$

wird, wenn nicht ε gleich null ist, mit allen seinen Ableitungen unendlich, falls sich der Punkt (xyz) dem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ unendlich nähert.

§ 2.

Auch für das Kurvenpotential gilt der Satz:

IIb) Das Kurvenpotential einer Kurve σ:

$$20)\quad V = \int\limits_{\sigma} \frac{\Sigma d\sigma}{r}$$

wird, abgesehen von ganz speciellen Ausnahmefällen, mit allen seinen Ableitungen unendlich, falls sich der Punkt (xyz) einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Kurve unendlich nähert.

Wir wollen den Satz IIb) zunächst an einem einfachen Beispiel erläutern:

Die Kurve σ sei eine Grade $\sigma_1 \sigma_2$; wir untersuchen das Integral:

$$V = \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{r}$$

für einen Punkt (xyz) der Ebene der Zeichnung, wobei wir also die Funktion Σ auf der Graden $\sigma_1 \sigma_2$ konstant gleich eins annehmen.

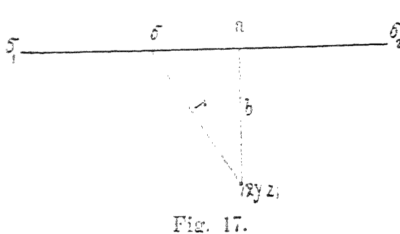


Fig. 17.

Fällt man von (xyz) auf die Grade $\sigma_1 \sigma_2$ die Senkrechte

$$(xyz) \longrightarrow a,$$

und sei b die Länge dieser Senkrechten, so ist:

$$r = \sqrt{b^2 + (a - \sigma)^2},$$

somit:

$$V = \int\limits_{\sigma_1}^{a} \frac{d\sigma}{\sqrt{b^2 + (a-\sigma)^2}} + \int\limits_{a}^{\sigma_2} \frac{d\sigma}{\sqrt{b^2 + (\sigma - a)^2}}$$

$$= -\left[\log\left\{a - \sigma + \sqrt{b^2 + (a-\sigma)^2}\right\}\right]_{\sigma_1}^{a}$$

$$+ \left[\log\left\{\sigma - a + \sqrt{b^2 + (\sigma - a)^2}\right\}\right]_{a}^{\sigma_2}$$

$$= -2\log b + \log\left\{a - \sigma_1 + \sqrt{b^2 + (a - \sigma_1)^2}\right\}\left\{\sigma_2 - a + \sqrt{b^2 + (\sigma_2 - a)^2}\right\}.$$

Lassen wir den variabeln Punkt (xyz) immer näher an die Grade $\sigma_1 \sigma_2$ heranrücken, so bleibt der zweite Summand im allgemeinen endlich, sein Grenzwert ist:

$$\log 4 (a - \sigma_1)(\sigma_2 - a);$$

dagegen wächst der erste Summand unendlich. Es wird also im allgemeinen V bei Annäherung des Punktes (xyz) an die Grade $\sigma_1 \sigma_2$ unendlich wachsen, und gleiches gilt von den Ableitungen des Potentials V nach x, y, z.

Ist Σ auf σ von einerlei Zeichen und

$$V = \int\limits_{\sigma} \frac{\Sigma \, d\sigma}{r}$$

das Potential einer beliebigen Raumkurve, so ist jedenfalls:

$$\text{abs. } V \geqq \text{abs. Min. } (\Sigma) \cdot \int\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{r},$$

wenn wir mit abs. Min. Σ den absolut kleinsten Wert von Σ auf σ bezeichnen. Sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ irgend ein Punkt der Kurve*) und (xyz) ein Punkt der Normalebene der Kurve in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$, dann können wir stets, wenn wir die Entfernung r_0:

$$(\xi_0 \eta_0 \zeta_0) \longrightarrow (xyz)$$

unter einem gewissen Kleinheitsgrade annehmen, erreichen,[5] dass

1. r_0 eine kleinste Entfernung des Punktes (xyz) von der Kurve σ vorstellt; und dass

2. dem nächsten Maximum oder Minimum, welches die Entfernung r des Punktes (xyz) von Punkten der Kurve hat, ein Punkt der Kurve σ entspricht, welcher von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ durch eine endliche Entfernung getrennt ist. Teilen wir daher die Kurve σ in Teilstrecken σ_i, auf denen $\cos(r\sigma)$ positiv, und Teilstrecken σ_k, auf denen $\cos(r\sigma)$ negativ ist, so ist:

$$\text{abs. } V \geqq \text{abs. Min. } (\Sigma) \left\{ + \sum\nolimits_i \int\limits_{\sigma_i} \frac{\cos(r\sigma)}{r}\, d\sigma - \sum\nolimits_k \int\limits_{\sigma_k} \frac{\cos(r\sigma)}{r}\, d\sigma \right\},$$

$$\geqq \text{abs. Min. } (\Sigma) \left\{ - \sum\nolimits_i \left| \log r \right|_{\sigma_{i1}}^{\sigma_{i2}} + \sum\nolimits_k \left| \log r \right|_{\sigma_{k1}}^{\sigma_{k2}} \right\},$$

wenn $\sigma_{i2}\, \sigma_{k2}$ die positiven Randpunkte, $\sigma_{i1}\, \sigma_{k1}$ die negativen Randpunkte der Kurvenstücke $\sigma_i\, \sigma_k$ vorstellen; und es ist $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zugleich ein positiver Randpunkt einer Strecke σ_i als auch ein negativer Randpunkt einer Strecke σ_k, während die nächsten Randpunkte in einer endlichen Entfernung von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ liegen.

Es folgt also:

$$\text{abs. } V \geqq \text{abs. Min. } (\Sigma) \left\{ B - 2 \log r_0 \right\},$$

wo B eine endliche Konstante vorstellt. Diese Ungleichung zeigt, dass V bei Verkleinerung von r_0 unendlich wächst, falls der absolut kleinste Wert von Σ nicht null ist. Allgemein kann somit das Kurvenpotential bei Annäherung des variabeln Punktes (xyz) an einen Punkt $(\xi \eta \zeta)$ der Kurve nur endlich bleiben, wenn Σ in $(\xi \eta \zeta)$ null oder wenn $(\xi \eta \zeta)$ ein Randpunkt der Kurve oder Trennungspunkt ihrer stetig gekrümmten Teile ist; und auch dann bleibt V nur in vereinzelten Fällen endlich, worauf wir hier nicht weiter eingehen wollen.

Die Ausdehnung der vorstehenden Betrachtung auf beliebige Funktionen Σ bedarf keiner weiteren Erläuterung.

So einfache Sätze, wie die Sätze IIa) und IIb) gelten nun für das Flächenpotential und Raumpotential nicht, und um für diese die entsprechenden Untersuchungen durchzuführen, müssen wir in dem folgenden Kapitel einige Untersuchungen einschalten, die unsere Aufgabe wesentlich erleichtern werden.

---

*) Der kein Randpunkt der Kurve sein möge, noch ein Trennungspunkt stetig gekrümmter Kurventeile.

2. Kapitel.

Das Flächenintegral

$$\int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega.$$

§ 1.

Wir denken uns ein Oberflächenstück ω im Raume; $d\omega$ sei ein Element desselben an der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, ν seine positive Normale, $\varkappa$ eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf der Fläche, (xyz) ein variabler Punkt im Raume und r die Entfernung und Richtung:

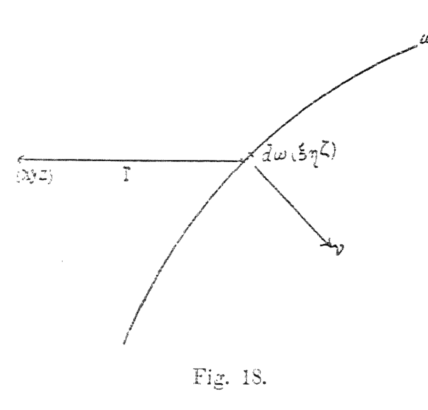


Fig. 18.

$$d\omega \longrightarrow (xyz);$$

wir wollen die Funktion:

$$21)\quad W(xyz) = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

in ihrer Abhängigkeit von der Lage des variabeln Punktes (xyz) im Raume näher untersuchen. Es ist zunächst, falls $\varkappa$ auf ω konstant ist:

$$22)\quad W(xyz) = \varkappa \overline{W}(xyz),$$

wo $\overline{W}$ das einfachere Integral vorstellt:

$$23)\quad \overline{W}(xyz) = \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega.$$

Wir zeichnen uns zur Untersuchung desselben ein Element $d\omega$ der Fläche allein heraus und konstruieren den Kegel von (xyz) nach der Randkurve von $d\omega$. Wir beschreiben ferner um (xyz) als Centrum eine Kugel mit dem Radius r und eine Kugel mit dem Radius 1. Aus diesen beiden Kugeln möge der soeben

konstruierte elementare Kegel respektive die Elemente dO und do ausschneiden; dann bestehen die Relationen:

$$24)\quad \begin{cases} dO = \pm\, d\omega \cos(r\nu), \\ \dfrac{dO}{do} = \dfrac{r^2}{1^2}, \end{cases}$$

wo in der ersten Formel das + oder — Zeichen zu wählen ist, je nachdem $\cos(r\nu)$ positiv oder negativ ist. Es ist somit bei derselben Festsetzung:

$$25)\quad do = \pm \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega.$$

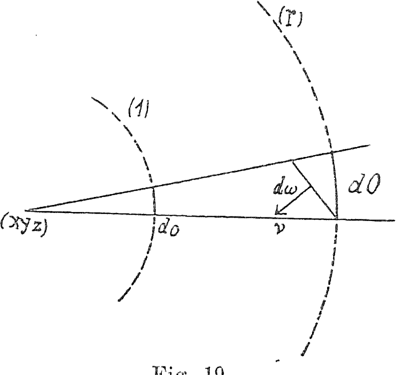


Fig. 19.

Man nennt do, also das Flächenelement, welches der von (xyz) an die Randkurve von dω gehende elementare Kegel aus der um (xyz) als Centrum mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel ausschneidet, die scheinbare Gröfse des Elementes dω für den Punkt (xyz).

Um das Integral $\overline{W}$ zu bilden, hat man nach 23) und 25) die scheinbaren Gröfsen aller Elemente dω, mit dem richtigen Vorzeichen versehen, zu addieren. Aus dieser Überlegung ergeben sich die beiden folgenden Sätze:

IIIa) Ist ω die Grenzfläche eines beliebigen Raumgebietes, als deren positive Seite nach Belieben die äufsere oder innere Seite gelte, so ist:

$$26)\quad \overline{W}(xyz) \equiv \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = 0$$

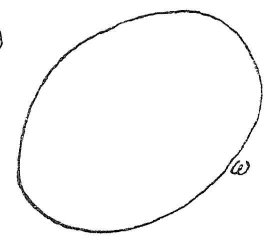


Fig. 20.

für jeden Punkt (xyz), der aufserhalb des von ω eingeschlossenen Raumgebietes liegt, unter Einschluss des Falles, dass der Punkt (xyz) unendlich[6] nahe an die Fläche ω herantritt.

IIIb) Ist ω die Grenzfläche eines beliebigen Raumgebietes, so ist:

$$27)\quad W(xyz) \equiv \int_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \pm 4\pi$$

für jeden Punkt (xyz), der innerhalb des von ω eingeschlossenen Raumgebietes liegt, unter Einschluss des Falles, dass der Punkt (xyz) unendlich nahe an die Fläche ω herantritt. Das Vorzeichen ist + oder —, je nachdem die innere oder äufsere Seite von ω als die positive Seite der Fläche festgesetzt wird.

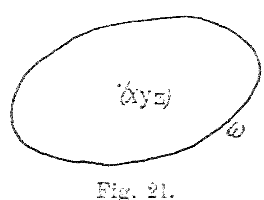


Fig. 21.

Um zunächst den Satz IIIa) zu beweisen, bei dem (xyz) aufserhalb des von ω eingeschlossenen Raumgebietes angenommen wird, denken wir uns um (xyz) als Centrum die Kugel mit dem Radius 1; do sei irgend ein Element derselben. Wir legen den elementaren Kegel von (xyz) an die Randkurve von do, dann wird dieser Kegel die geschlossene Fläche ω entweder gar nicht oder in einer geraden Anzahl von Elementen

$$d\omega_1\ d\omega_2\ \ldots\ldots\ d\omega_{2\lambda}$$

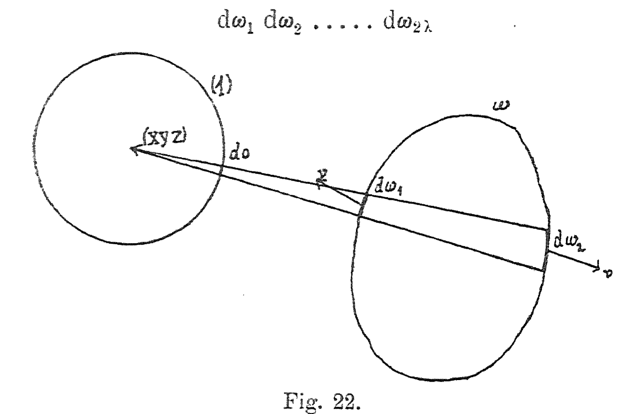


Fig. 22.

schneiden und es wird do die scheinbare Gröfse jedes dieser Elemente für den Punkt (xyz) darstellen; bei Aufstellung der Formel 25) wird aber für λ Elemente $d\omega$ das positive, für λ Elemente $d\omega$ das negative Zeichen zu setzen sein, da die betreffenden $\cos(r\nu)$ für λ Elemente $d\omega$ positiv, für λ Elemente $d\omega$ negativ sind. Der

Teil des Integrales $\overline{W}$, der von den obigen 2λ Elementen herrührt, wird somit aus Summanden bestehen, die sich paarweise fortheben, er wird also null sein. Bedenken wir, dass Gleiches für jeden beliebigen elementaren Kegel gilt, der von (xyz) an die Randkurve irgend eines Elementes do der Kugel (1) gelegt wird, so folgt, dass sich das ganze Integral $\overline{W}$ aus Summanden zusammensetzt, die sich paarweise fortheben, dass also $\overline{W}$ für jeden Punkt (xyz) null ist, der aufserhalb des von ω umschlossenen Raumgebietes liegt.

In dem Satze IIIb) wird der Punkt (xyz) innerhalb des von ω umschlossenen Raumgebietes angenommen. In diesem Falle konstruieren wir um (xyz) als Centrum eine Kugel mit dem Radius R, der klein genug ist, dass die ganze Kugel (R) innerhalb ω liegt. Es ist dann für das (in der Figur schraffierte) Gebiet, welches übrig bleibt, wenn man aus dem von ω umschlossenen Raumgebiet die Kugel (R) herausschneidet, der Punkt (xyz) ein äufserer Punkt, somit nach IIIa):

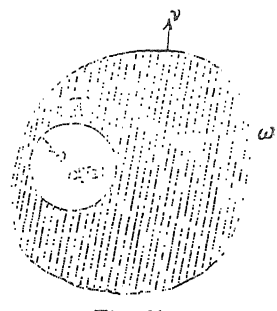


Fig. 23.

$$\int\limits_{\omega+(R)} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = 0,$$

wobei wir zunächst als positive Seite der Fläche $\omega + (R)$ ihre äufsere Seite wählen wollen, so dafs ν die äufsere Normale von ω, die innere Normale der Kugelfläche (R) vorstellt. Es folgt aus dieser Gleichung:

$$\overline{W}(x, y, z) \equiv \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = -\int\limits_{(R)} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega.$$

Nun ist für die Kugelfläche (R) jedes:

$$r = R,$$

$$\cos(r\nu) = 1,$$

somit:

$$\overline{W}(x, y, z) = -\frac{1}{R^2}\int\limits_{(R)} d\omega = -4\pi.$$

Dabei ist ν die äufsere Normale von ω, d. h. es wird die äufsere Seite von ω als die positive Seite der Fläche voraus-

gesetzt, im anderen Falle erhält $\overline{W}$ das entgegengesetzte Vorzeichen. Damit ist auch der Satz IIIb) bewiesen.

Wir wollen jetzt das allgemeinere Integral W untersuchen, in dem $\varkappa$ nicht als konstant vorausgesetzt wird.

§ 2.

Es sei wieder ω ein beliebiges Oberflächenstück; wir denken uns um den variablen Punkt (xyz) als Centrum die Kugel mit dem Radius 1; wir legen von (xyz) an die Randkurve irgend eines Elementes do dieser Kugel den elementaren Kegel, der die Oberfläche ω in einer *endlichen**) Anzahl räumlich getrennter Elemente

$$d\omega_1 \, d\omega_2 \, \ldots\ldots \, d\omega_\lambda$$

schneiden wird. Ihre Koordinaten seien

$$(\xi_1 \eta_1 \zeta_1), \; (\xi_2 \eta_2 \zeta_2) \, \ldots\ldots \, (\xi_\lambda \eta_\lambda \zeta_\lambda),$$

ihre positiven Normalen:

$$\nu_1 \, \nu_2 \, \ldots\ldots \, \nu_\lambda,$$

und ihre Entfernungen von (xyz):

$$r_1 \, r_2 \, \ldots\ldots \, r_\lambda;$$

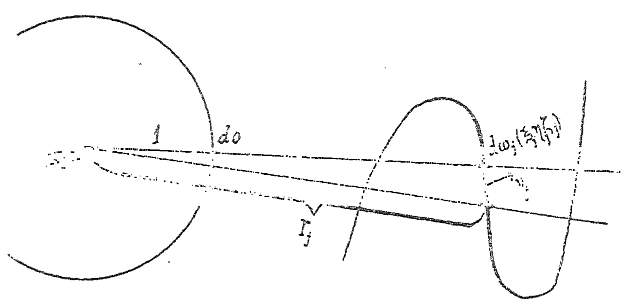


Fig. 24.

dann ist, da do die scheinbare Gröfse jedes einzelnen dieser Elemente für den Punkt (xyz) ist, mit Hinsicht auf die allgemeine Relation 25) jedenfalls:

$$28) \quad \text{abs.} \left[\varkappa \, (\xi_j \eta_j \zeta_j) \, \frac{\cos\,(r_j \nu_j)}{r_j^2} \, d\omega_j \right] \overline{\lesseqgtr} \; \text{abs. Max.} \, (\varkappa) \cdot do, \; j = 1, 2 \ldots \lambda$$

*) Infolge der vorausgesetzten abteilungsweisen Monotonität der Funktionen $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$.

und somit(7):

$$29)\quad \text{abs.}\left[\sum_{1}^{\lambda}{}_j \varkappa(\xi_j\,\eta_j\,\zeta_j)\frac{\cos(r_j\,\nu_j)}{r_j^2}\,d\omega_j\right] \overline{\overline{<}}\ \text{abs. Max.}\,(\varkappa)\cdot\lambda do,$$

wenn abs. Max. ($\varkappa$) den absolut gröfsten Wert von $\varkappa$ auf ω vorstellt.

Bilden wir die Ungleichung 29) für alle von (xyz) ausgehenden elementaren Kegel, bezeichnen das gröfste λ mit $\varLambda$, dann folgt aus 29) (7):

$$\text{abs.}\left[\int_{\omega}\varkappa\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right] \overline{\overline{<}}\ \text{abs. Max.}\,(\varkappa)\,\varLambda\int_{(1)} do,$$

oder:

$$30)\quad \text{abs.}\,[W\,(xyz)] \overline{\overline{<}}\ 4\pi\varLambda\ \text{abs. Max.}\,(\varkappa).$$

Wir erhalten das Resultat:

IVa) Für den absoluten Wert des Flächenintegrales:

$$W\,(xyz) = \int_{\omega}\varkappa\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

besteht die Ungleichung:

$$31)\quad \text{abs.}\,[W\,(xyz)] \overline{\overline{<}}\ A\cdot\text{abs. Max.}\,(\varkappa),$$

wo A eine endliche Zahl, abs. Max. ($\varkappa$) den absolut gröfsten Wert von $\varkappa$ auf ω vorstellt. Dabei kann der Punkt (xyz) (unter Vermeidung der Fläche*) ω selbst) beliebig im Raume liegen und auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten.

Zusatz zu IVa) Das Flächenintegral W ist (unter Vermeidung der Fläche ω selbst) für jeden Punkt des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann, stets endlich.

Es folgt dies aus 31), da wir $\varkappa$ ja als auf der Fläche ω abteilungsweise eindeutig und stetig voraussetzen.

---

*) Wie man derartigen Flächenintegralen auch auf der Fläche selbst einen Sinn geben kann, s. S. 73.

§ 3.

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion W kann, da jedes

$$\frac{\cos(r\nu)}{r^2}$$

für jeden Punkt (xyz) eindeutig und stetig ist, der von ω durch irgend welche Entfernung getrennt ist, nur in Frage kommen, wenn der Punkt (xyz) von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantritt.

Es sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Fläche, der durch irgend welche Entfernungen von der Randkurve der Fläche und den Trennungskurven von Flächenteilen, auf denen $\varkappa$ eindeutig und stetig ist, getrennt sei, ν_0 sei die positive Normale, $\varkappa_0$ der Wert von $\varkappa$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$. Wir konstruieren um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ als Centrum eine Kugel mit einem Radius R, der klein genug ist, so dass (für alle Kugeln mit Radien $\leqq$ R) die Schnittkurve ς mit der Fläche ω eine geschlossene Kurve ist. Die Kurve ς teilt ω in zwei Teile, einen äufseren ω_1, der $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ nicht enthält, und einen inneren ω_2, der den Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ enthält. Das auf der positiven Seite von ω liegende Stück der Kugelfläche bezeichnen wir mit Σ. Es ist identisch:

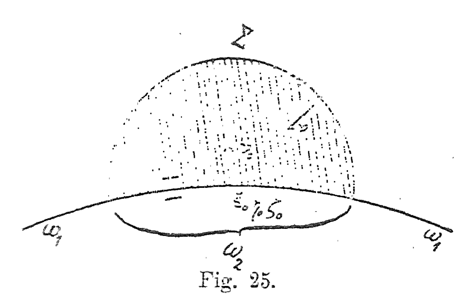


Fig. 25.

$$32)\quad \begin{cases} W(xyz) \equiv \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \equiv \int\limits_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega - \int\limits_{\Sigma} \varkappa_0 \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ \qquad + \int\limits_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \int\limits_{\Sigma+\omega_2} \varkappa_0 \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega; \end{cases}$$

wir haben bei dieser Schreibweise nur Gröfsen addiert und zu gleicher Zeit subtrahiert, also an dem Werte von W nichts geändert, und wir wollen noch als die positiven ν von Σ ihre inneren Normalen festsetzen. Man kann nun $\Sigma + \omega_2$ als die Oberfläche eines (in der Figur schraffierten) Raumgebietes auffassen, für welches jeder Punkt $(x_+ y_+ z_+)$, der auf der positiven Seite der Fläche ω einen Abstand $<$R von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ hat, ein innerer Punkt

ist, während für dasselbe jeder Punkt $(x_- y_- z_-)$ auf der negativen Seite von ω ein äufserer Punkt ist.

Wir können nun auf das vierte Integral rechts in 32) die Sätze IIIa) IIIb) in Anwendung bringen, dann folgt für einen Punkt $(x_+ y_+ z_+)$:

$$33a)\quad W_+ = \int_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \int_{\Sigma} \varkappa_0 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \int_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + 4\pi_0\varkappa,$$

für einen Punkt $(x_- y_- z_-)$:

$$33b)\quad W_- = \int_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \int_{\Sigma} \varkappa_0 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \int_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

und diese beiden Formeln gelten, auch wenn man den Punkt $(x_+ y_+ z_+)$ und den Punkt $(x_- y_- z_-)$ dem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ unendlich nähert. Es wird dann:

$$34)\quad W_- - W_+ = -4\pi\varkappa_0 + \lim \left| \int_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{x_+ \, y_+ \, z_+}^{x_- \, y_- \, z_-},$$

denn die beiden ersten Integrale in 33a) und 33b) sind in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ stetig, weil dieser Punkt von den Flächen ω_1 und Σ durch irgend welche Entfernungen getrennt ist. Es ist nun nach Satz IVa):

$$35)\quad \text{abs.}\left[\int_{\omega_2} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right] \overline{\leq} A \text{ abs. Max. } (\varkappa - \varkappa_0),$$

wo A eine endliche Zahl, abs. Max. $(\varkappa - \varkappa_0)$ den absolut gröfsten Wert von $(\varkappa - \varkappa_0)$ auf ω_2 vorstellt. Lassen wir daher die Kugel Σ und damit auch die Kurve ς den Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ immer näher umschliefsen, so können wir hiernach, da $\varkappa$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ stetig ist, das zweite Glied rechts in 34) unter jeden beliebig kleinen Wert herabdrücken, und wir erhalten im Grenzfalle:

$$36)\quad W_- - W_+ = -4\pi\varkappa_0;$$

es war dabei für unseren Beweis völlig gleichgültig, in welcher Weise wir die Punkte $(x_+ y_+ z_+)$ resp. $(x_- y_- z_-)$ dem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ unendlich genähert haben. Wir können unser Resultat folgendermafsen aussprechen:

IVb) Das Integral:

$$W(xyz) = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

ist, bei Vermeidung der Fläche ω selbst, für jeden Punkt (xyz) des Raumes eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann. Bei dem Durchgange durch die Fläche wird dagegen W einen Sprung erleiden, und zwar gilt, wenn man mit W_+ und W_- die Werte bezeichnet, welche W bei unendlicher Annäherung des Punktes (xyz) an einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche von der positiven resp. negativen Seite annimmt, die Relation:

$$37)\quad W_- - W_+ = -4\pi\varkappa.$$

Der Satz wird im allgemeinen eine Ausnahme erleiden, wenn man den Punkt (xyz) gerade einem Punkte der Randkurve der Fläche ω oder einer Trennungskurve von Flächenteilen, auf denen $\varkappa$ eindeutig und stetig ist, unendlich nähert.

Über die ersten und zweiten Ableitungen von W s. S. 48 u. 51

3. Kapitel.

Das Flächenpotential und seine Ableitungen.

§ 1.

Wir untersuchen jetzt das Flächenpotential, also das Flächenintegral:

$$38)\quad V(x, y, z) = \int\limits_{\omega} \frac{H d\omega}{r},$$

wobei $d\omega$ $(\xi\eta\zeta)$ ein Element einer gegebenen Fläche ω, H eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf der Fläche und r die Entfernung des variablen Punktes (xyz) von $d\omega$ vorstellt.

Es ist zunächst:

$$39)\quad \text{abs. } V \leqq \text{abs. Max.}(H) \cdot \overline{V},$$

wo:

$$40)\quad \overline{V} = \int\limits_{\omega} \frac{d\omega}{r}$$

und abs. Max. (H) der absolut gröfste Wert ist, den H überhaupt auf ω hat. Das einfachere Potential $\overline{V}$ formen wir um, indem wir von der folgenden Identität ausgehen:

$$41)\quad \begin{cases} \frac{1}{r} \equiv f_1 \left\{ \frac{\partial}{\partial \eta}\left(f_2 \cos(rx) - f_1 \cos(ry)\right) - \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(f_1 \cos(rz) - f_3 \cos(rx)\right) \right\} \\ \quad + f_2 \left\{ \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(f_3 \cos(ry) - f_2 \cos(rz)\right) - \frac{\partial}{\partial \xi}\left(f_2 \cos(rx) - f_1 \cos(ry)\right) \right\} \\ \quad + f_3 \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi}\left(f_1 \cos(rz) - f_3 \cos(rx)\right) - \frac{\partial}{\partial \eta}\left(f_3 \cos(ry) - f_2 \cos(rz)\right) \right\} \\ \quad - \left\{ f_1 \cos(rx) + f_2 \cos(ry) + f_3 \cos(rz) \right\} \left\{ \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \frac{\partial f_2}{\partial \eta} + \frac{\partial f_3}{\partial \zeta} \right\} \\ \quad - \frac{\left\{ f_1 \cos(rx) + f_2 \cos(ry) + f_3 \cos(rz) \right\}^2}{r}, \end{cases}$$

eine Identität, die für drei beliebige (differenzierbare) Funktionen $f_1\, f_2\, f_3$ von ξ, η, ζ gilt, wenn dieselben nur die Gleichung:

$$42)\quad f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 \equiv 1$$

identisch erfüllen. Wir wählen für $f_1\, f_2\, f_3$ die drei ganz bestimmten Funktionen von ξ, η, ζ:

$$43)\quad \begin{cases} f_1 = \cos(\nu x), \\ f_2 = \cos(\nu y), \\ f_3 = \cos(\nu z), \end{cases}$$

welche ja der Bedingung 42) identisch genügen, und setzen zur Abkürzung:

$$44)\quad \begin{cases} f_{11} = \frac{\partial f_1}{\partial \xi}, \\ f_{22} = \frac{\partial f_2}{\partial \eta}, \\ f_{33} = \frac{\partial f_3}{\partial \zeta}. \end{cases}$$

Wenn wir den auf diese Weise umgestalteten Wert von $\frac{1}{r}$ in 40) einsetzen, so folgt:

$$
45)\quad \begin{cases}
\overline{V} = \int\limits_{\omega} \Big[\cos(\nu x) \Big\{ \frac{\partial}{\partial \eta} \big(\cos(rx)\cos(\nu y) - \cos(\nu x)\cos(ry)\big) \\
\qquad - \frac{\partial}{\partial \zeta} \big(\cos(rz)\cos(\nu x) - \cos(rx)\cos(\nu z)\big) \Big\} \\
\qquad + \cos(\nu y) \Big\{ \frac{\partial}{\partial \zeta} \big(\cos(ry)\cos(\nu z) - \cos(\nu y)\cos(rz)\big) \\
\qquad - \frac{\partial}{\partial \xi} \big(\cos(rx)\cos(\nu y) - \cos(ry)\cos(\nu x)\big) \Big\} \\
\qquad + \cos(\nu z) \Big\{ \frac{\partial}{\partial \xi} \big(\cos(rz)\cos(\nu x) - \cos(\nu z)\cos(rx)\big) \\
\qquad - \frac{\partial}{\partial \eta} \big(\cos(ry)\cos(\nu z) - \cos(rz)\cos(\nu y)\big) \Big\} \\
\qquad - \cos(r\nu)\,(f_{11} + f_{22} + f_{33}) \\
\qquad - \frac{\cos^2(r\nu)}{r} \Big]\, d\omega.
\end{cases}
$$

Wir können die ersten drei Zeilen rechts mit Hilfe des Stokesschen Theorems umformen, indem wir in der Formel desselben (s. S. 12):

$$
\int\limits_{\omega} \Big\{ \Big(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} \Big) \cos(\nu x) + \Big(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \Big) \cos(\nu y) + \Big(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \Big) \cos(\nu z) \Big\}\, d\omega
$$

$$
= \int\limits_{\sigma} \{ U \cos(\sigma x) + V \cos(\sigma y) + W \cos(\sigma z) \}\, d\sigma
$$

für den Augenblick:

$$
\begin{aligned}
U &= \cos(ry)\cos(\nu z) - \cos(rz)\cos(\nu y), \\
V &= \cos(rz)\cos(\nu x) - \cos(rx)\cos(\nu z), \\
W &= \cos(rx)\cos(\nu y) - \cos(ry)\cos(\nu x)
\end{aligned}
$$

setzen.

Es erhält dann die Formel 45) die folgende Gestalt:

$$
46)\quad \begin{cases}
\overline{V} = \int\limits_{\sigma} \big[\cos(\sigma x) \{ \cos(ry)\cos(\nu z) - \cos(rz)\cos(\nu y) \} \\
\qquad + \cos(\sigma y) \{ \cos(rz)\cos(\nu x) - \cos(rx)\cos(\nu z) \} \\
\qquad + \cos(\sigma z) \{ \cos(rx)\cos(\nu y) - \cos(ry)\cos(\nu x) \} \big]\, d\sigma \\
\qquad - \int\limits_{\omega} [r^2 (f_{11} + f_{22} + f_{33}) + r\cos(r\nu)]\, \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,
\end{cases}
$$

wo nunmehr das erste Integral über alle Elemente $d\sigma$ der Randkurve σ von ω zu erstrecken ist.

Wir können aus der Formel 46) einige wichtige Schlüsse ziehen. Der Ausdruck unter dem Kurvenintegral ist der Kosinus eines gewissen Winkels und ist als solcher seinem absoluten Werte nach kleiner oder gleich eins. Es ist daher das Kurvenintegral seinem absoluten Werte nach:

$$\overline{\overline{<}}\, \sigma,$$

wenn σ die Länge der Randkurve vorstellt. Es ist ferner das Flächenintegral nach dem Satze IV a) seinem absoluten Werte nach

$$\overline{\overline{<}}\, A \cdot \text{abs. Max.}\, [r^2\, (f_{11} + f_{22} + f_{33}) + r \cos(r\nu)],$$

wo A eine endliche Zahl vorstellt. Es folgt somit:

$$47)\quad V\, \overline{\overline{<}}\, \sigma + A \cdot \text{abs. Max.}\, [r^2\, (f_{11} + f_{22} + f_{33}) + r \cos(r\nu)],$$

und nach 39):

$$48)\quad \text{abs. } V\, \overline{\overline{<}}\, \text{abs. Max.}\, (H) \{\sigma + A \cdot \text{abs. Max.}\, [r^2\, (f_{11} + f_{22} + f_{33}) + r \cos(r\nu)]\}.$$

Es folgt hieraus, dass V auch endlich bleibt, wenn der Punkt (xyz) unendlich nahe an die Oberfläche ω von der einen oder anderen Seite herantritt.

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion V kann gleichfalls nach I a) nur in Frage kommen, wenn der Punkt (xyz) von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantritt.

Es sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Fläche; wir teilen durch eine Kurve ς die Fläche ω in zwei Teile ω_1 und ω_2, von denen der zweite $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ enthält, während der erste durch irgend welche Entfernungen von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ getrennt sei; die von den beiden Teilen der Fläche herrührenden Potentiale seien V_1 und V_2. Lassen wir den variabeln Punkt (xyz) unendlich nahe von der einen oder anderen Seite an den Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ herantreten, so ist zunächst nach I a) V_1 in diesem Punkte eindeutig und stetig, während V_2 wegen der nach 48) geltenden Ungleichung:

$$\text{abs.} V_2\, \overline{\overline{<}}\, \text{abs. Max.}\, (H) \{\varsigma + A \cdot \text{abs. Max.}\, [r^2\, (f_{11} + f_{22} + f_{33}) + r \cos(r\nu)]\}$$

durch Verkleinerung von ς unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden kann.

Es folgt daraus, dass V bei unendlicher Annäherung des Punktes (xyz) an den Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ von der einen oder anderen Seite stetig bleibt, und dass auch die Randwerte von V zu beiden Seiten der Fläche gleich sind.

Va) Das Flächenpotential:

$$V = \int_\omega \frac{H d\omega}{r}$$

ist für jeden Punkt (xyz) des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω*) herantreten kann, stets endlich. Es kann nirgends, auch nicht bei dem Durchgange durch die Fläche ω, einen Sprung erleiden.**)

§ 2.

Wir betrachten nun die ersten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$49)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\displaystyle\int_\omega H \frac{\cos(rx)}{r^2}\, d\omega, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = -\displaystyle\int_\omega H \frac{\cos(ry)}{r^2}\, d\omega, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\displaystyle\int_\omega H \frac{\cos(rz)}{r^2}\, d\omega, \end{cases}$$

und zwar beschäftigen wir uns zunächst nur mit $\frac{\partial V}{\partial x}$, die Untersuchungen für $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ sind völlig analog.

Wir setzen die ersten Ableitungen von H als auf ω überall endlich voraus und bedienen uns zur Umformung des Integrales $\frac{\partial V}{\partial x}$ der Identität:

*) Ähnlich, wie früher (S. 36), müssen wir zunächst den Fall, dass (xyz) ein Punkt auf der Fläche ω selbst ist, ausschliefsen, da wir denselben noch nicht untersucht haben. Wir verweisen in bezug auf diesen Fall auf die Untersuchungen S. 73.

**) Wir brauchen für den Beweis dieses Satzes über H lediglich voraussetzen, dass es auf ω endlich ist.

$$50)\quad \left\{\begin{aligned} -\frac{H\cos(\mathrm{rx})}{\mathrm{r}^2} \equiv\ & \mathrm{f}_1\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{H\mathrm{f}_2}{\mathrm{r}}\right)-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-\frac{H\mathrm{f}_3}{\mathrm{r}}\right)\right\}\\ & +\mathrm{f}_2\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\ (\mathrm{null})-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{H\mathrm{f}_2}{\mathrm{r}}\right)\right\}\\ & +\mathrm{f}_3\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-\frac{H\mathrm{f}_3}{\mathrm{r}}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\ (\mathrm{null})\right\}\\ & +\frac{1}{\mathrm{r}}\left\{\frac{\partial H}{\partial\xi}-H\mathrm{f}_1(\mathrm{f}_{11}+\mathrm{f}_{22}+\mathrm{f}_{33})\right.\\ & \left.-\mathrm{f}_1\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\mathrm{f}_1+\frac{\partial H}{\partial\eta}\mathrm{f}_2+\frac{\partial H}{\partial\zeta}\mathrm{f}_3\right)\right\}^{(8)}\\ & -\frac{H\mathrm{f}_1}{\mathrm{r}^2}\left\{\mathrm{f}_1\cos(\mathrm{rx})+\mathrm{f}_2\cos(\mathrm{ry})+\mathrm{f}_3\cos(\mathrm{rz})\right\}, \end{aligned}\right.$$

einer Relation, die stets identisch besteht für drei beliebige Funktionen $\mathrm{f}_1\,\mathrm{f}_2\,\mathrm{f}_3$ von ξ, η, ζ, falls dieselben die Bedingung:

$$51)\quad \mathrm{f}_1{}^2+\mathrm{f}_2{}^2+\mathrm{f}_3{}^2=1$$

identisch erfüllen. Unter $\mathrm{f}_{11}\,\mathrm{f}_{22}\,\mathrm{f}_{33}$ verstehen wir dabei wieder die Ableitungen $\frac{\partial \mathrm{f}_1}{\partial\xi}$, $\frac{\partial \mathrm{f}_2}{\partial\eta}$, $\frac{\partial \mathrm{f}_3}{\partial\zeta}$. Wie früher setzen wir:

$$52)\quad \left\{\begin{aligned} \mathrm{f}_1 &= \cos(\nu\mathrm{x}),\\ \mathrm{f}_2 &= \cos(\nu\mathrm{y}),\\ \mathrm{f}_3 &= \cos(\nu\mathrm{z}) \end{aligned}\right.$$

und formen nach dieser Substitution mit Hilfe der Identität 50) die erste Gleichung 49) um, dann folgt:

$$53)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{x}} = \int\limits_{\omega}\Bigg[& \cos(\nu\mathrm{x})\left\{\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{H\cos(\nu\mathrm{y})}{\mathrm{r}}\right)-\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(-\frac{H\cos(\nu\mathrm{z})}{\mathrm{r}}\right)\right\}\\ & +\cos(\nu\mathrm{y})\left\{\frac{\partial}{\partial\zeta}\ (\mathrm{null})-\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{H\cos(\nu\mathrm{y})}{\mathrm{r}}\right)\right\}\\ & +\cos(\nu\mathrm{z})\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(-\frac{H\cos(\nu\mathrm{z})}{\mathrm{r}}\right)-\frac{\partial}{\partial\eta}\ (\mathrm{null})\right\}\\ & +\frac{1}{\mathrm{r}}\left\{\frac{\partial H}{\partial\xi}-H\cos(\nu\mathrm{x})(\mathrm{f}_{11}+\mathrm{f}_{22}+\mathrm{f}_{33})\right.\\ & \left.-\cos(\nu\mathrm{x})\left(\frac{\partial H}{\partial\xi}\cos(\nu\mathrm{x})+\frac{\partial H}{\partial\eta}\cos(\nu\mathrm{y})+\frac{\partial H}{\partial\zeta}\cos(\nu\mathrm{z})\right)\right\}^{(8)}\\ & -H\cos(\nu\mathrm{x})\frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2}\Bigg]\,d\omega. \end{aligned}\right.$$

Wir können die ersten drei Zeilen rechts mit Hilfe des Stokesschen Theorems umformen, indem wir in der Formel desselben (S. 12):

$$\int_\omega \left\{ \left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta} \right) \cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi} \right) \cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \cos(\nu z) \right\} d\omega$$

$$= \int_\sigma \left\{ U \cos(\sigma x) + V \cos(\sigma y) + W \cos(\sigma z) \right\} d\sigma$$

für den Augenblick:

$$U = 0,$$

$$V = -\frac{H \cos(\nu z)}{r},$$

$$W = +\frac{H \cos(\nu y)}{r},$$

setzen.

Es erhält dann die Formel 53) die Gestalt:

$$54) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \displaystyle\int_\sigma H \frac{\cos(\nu y) \cos(\sigma z) - \cos(\nu z) \cos(\sigma y)}{r} d\sigma \\ + \displaystyle\int_\omega \frac{\frac{\partial H}{\partial \xi} - \cos(\nu x) \left[H(f_{11} + f_{22} + f_{33}) + \left(\frac{\partial H}{\partial \xi} \cos(\nu x) + \frac{\partial H}{\partial \eta} \cos(\nu y) + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \cos(\nu z) \right) \right]}{r} d\omega \\ - \displaystyle\int_\omega H \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \end{cases}$$

wo nunmehr das erste Integral rechts über alle Elemente der Randkurve σ zu erstrecken ist, und, falls H, $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auf ω nur abteilungsweise eindeutig und stetig sind, auch über die beiden Seiten derjenigen Kurven, welche die Fläche ω in Teile zerlegen, auf denen H, $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ eindeutig und stetig sind.

Wir können aus der Formel 54) einige wichtige Schlüsse ziehen. Das Kurvenintegral ist endlich, solange wir uns in endlicher Entfernung von der Kurve (den Kurven) σ halten; das zweite Integral ist ein Flächenpotential und als solches nach V a) stets endlich, das dritte Integral ist seinem absoluten Werte nach

$$\leqq A \cdot \text{abs. Max.} \left(H \cos(\nu x) \right) \leqq A \cdot \text{abs. Max.} (H),$$

wo A eine endliche Zahl vorstellt (IVa). Es folgt somit aus 54) die Endlichkeit von $\frac{\partial V}{\partial x}$ für jeden beliebigen Punkt des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an ω herantreten kann,*) falls wir uns nur in endlicher Entfernung von der Kurve (den Kurven) σ halten.

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial V}{\partial x}$ kann nach Ia) nur in Frage kommen, wenn der Punkt (xyz) von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantritt.

Es sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Fläche, der nicht gerade auf der Kurve (auf einer der Kurven) σ liegt, ν_0 seine positive Normale, $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_+$ der Wert von $\frac{\partial V}{\partial x}$, wenn man (xyz) von der positiven Seite an $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ unendlich nahe herantreten lässt, und $\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_-$ der Wert von $\frac{\partial V}{\partial x}$, wenn (xyz) von der negativen Seite an $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ unendlich nahe herantritt, dann folgt aus 54):

$$55)\quad \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_- - \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_+ = 4\pi H(\xi_0 \eta_0 \zeta_0) \cos(\nu_0 x),$$

denn das erste Integral rechts in 54) ist in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ stetig, das zweite Integral ein Flächenpotential, das dritte ein Flächenintegral von der Art:

$$\int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

es folgt somit die Formel 55) durch Anwendung der Sätze Va) und IVb), und es ist dabei gleichgültig, in welcher Weise wir den Punkt (xyz) dem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ von der positiven resp. negativen Seite unendlich nähern. Wir erhalten den Satz:

Vb) Die ersten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V = \int_\omega \frac{H d\omega}{r}$$

nach x, y, z sind für jeden Punkt (xyz) des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe

*) Vgl. Anm. 1, S. 40.

an die Fläche ω herantreten kann, stets endlich, falls H auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig und mit seinen ersten Ableitungen überall endlich ist. Sie sind, bei Vermeidung der Fläche ω selbst, für jeden Punkt (xyz) des Raumes eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann. Bei dem Durchgange durch die Fläche werden dagegen die Funktionen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ Sprünge erleiden, und zwar gelten, wenn man mit:

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{+}, \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{+}, \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{+}$$

resp.

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{-}, \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{-}, \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{-}$$

die Werte bezeichnet, welche

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}$$

annehmen, wenn man (xyz) einem Punkte ($\xi\eta\zeta$) der Fläche ω von der positiven resp. negativen Seite unendlich nähert, die Relationen:

$$56) \begin{cases} \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{-} - \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{+} = 4\pi H \cos(\nu x), \\ \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{-} - \left.\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{+} = 4\pi H \cos(\nu y), \qquad \left.\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{-} - \left.\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{+} = 4\pi H,^{*)} \\ \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{-} - \left.\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{+} = 4\pi H \cos(\nu z). \end{cases}$$

Der Satz wird im allgemeinen, sowohl in bezug auf die Endlichkeit der Funktionen $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$, als auch in bezug auf die Gültigkeit der Formeln 56) eine Ausnahme erleiden, wenn man den Punkt (xyz) gerade einem Punkte der Randkurve von ω oder derjenigen

*) Da:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\partial V}{\partial x}\cos(\nu x) + \frac{\partial V}{\partial y}\cos(\nu y) + \frac{\partial V}{\partial z}\cos(\nu z).$$

Kurven unendlich nähert, welche ω in Teile zerlegen, auf denen die Funktionen H, $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ eindeutig und stetig sind.(9)

§ 3.

Um die zweiten Ableitungen des Flächenpotentials, ausgehend von der Formel 54), zu untersuchen, müssen wir uns zunächst mit den Ableitungen des Flächenintegrales:

$$W(xyz) = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

beschäftigen.

Wir untersuchen somit jetzt die Funktionen:

$$57)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x} = \displaystyle\int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(\nu x) - 3\cos(rx)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega, \\ \dfrac{\partial W}{\partial y} = \displaystyle\int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(\nu y) - 3\cos(ry)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega, \\ \dfrac{\partial W}{\partial z} = \displaystyle\int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(\nu z) - 3\cos(rz)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega. \end{cases}$$

Wir untersuchen nur $\frac{\partial W}{\partial x}$, die Betrachtungen für $\frac{\partial W}{\partial y}$, $\frac{\partial W}{\partial z}$ sind vollkommen analog.

Wir setzen die ersten Ableitungen von $\varkappa$ als überall endlich voraus und bedienen uns zur Umformung des Integrales $\frac{\partial W}{\partial x}$ der Identität:

$$58)\quad \begin{cases} \varkappa \dfrac{\cos(\nu x) - 3\cos(rx)\cos(r\nu)}{r^3} \\ \qquad \equiv \cos(\nu x)\left\{\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\dfrac{\varkappa\cos(ry)}{r^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial \zeta}\left(-\dfrac{\varkappa\cos(rz)}{r^2}\right)\right\} \\ \qquad + \cos(\nu y)\left\{\dfrac{\partial}{\partial \zeta}\,(\text{null}) - \dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\dfrac{\varkappa\cos(ry)}{r^2}\right)\right\} \\ \qquad + \cos(\nu z)\left\{\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(-\dfrac{\varkappa\cos(rz)}{r^2}\right) - \dfrac{\partial}{\partial \eta}\,(\text{null})\right\} \\ \qquad - \cos(\nu x)\,\dfrac{\dfrac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\cos(rx) + \dfrac{\partial\varkappa}{\partial\eta}\cos(ry) + \dfrac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\cos(rz)}{r^2} \\ \qquad + \dfrac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}. \end{cases}$$

Nach Einsetzung dieses Ausdruckes in dem Integrale $\frac{\partial W}{\partial x}$ benutzen wir weiter zur Umformung des Integrales der drei ersten Zeilen rechts in 58) die Formel des Stokesschen Theorems (S. 12):

$$\int\limits_{\omega}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \eta}-\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\cos(\nu x)+\left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}-\frac{\partial W}{\partial \xi}\right)\cos(\nu y)+\left(\frac{\partial V}{\partial \xi}-\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\cos(\nu z)\right\} d\omega$$
$$=\int\limits_{\sigma}\left\{U\cos(\sigma x)+V\cos(\sigma y)+W\cos(\sigma z)\right\} d\sigma,$$

indem wir in derselben für den Augenblick:

$$U=0,$$
$$V=-\varkappa\frac{\cos(rz)}{r^2},$$
$$W=+\varkappa\frac{\cos(ry)}{r^2}$$

setzen. Es folgt somit:

$$59)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial x}=\displaystyle\int\limits_{\sigma}\varkappa\,\frac{\cos(ry)\cos(\sigma z)-\cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\,d\sigma \\ \quad -\displaystyle\int\limits_{\omega}\cos(\nu x)\left\{\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\,\frac{\cos(rx)}{r^2}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}\,\frac{\cos(ry)}{r^2}+\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\,\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\}d\omega \\ \quad +\displaystyle\int\limits_{\omega}\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{cases}$$

wo nunmehr das erste Integral über alle Elemente der Randkurve σ zu erstrecken ist, und, falls $\varkappa$ auf ω nur abteilungsweise stetig ist, auch über die beiden Seiten derjenigen Kurven, welche ω in Teile zerlegen, auf denen $\varkappa$ eindeutig und stetig ist.(9)

Wir können aus der Formel 59) einige wichtige Schlüsse ziehen. Das Kurvenintegral ist endlich, wenn wir uns in endlicher Entfernung von der Kurve (den Kurven) σ halten; das zweite Integral setzt sich additiv aus den ersten Ableitungen von Flächenpotentialen zusammen und ist somit nach V b) überall endlich, falls wir auch die zweiten Ableitungen von $\varkappa$ als überall endlich

voraussetzen; das dritte Integral ist seinem absoluten Werte nach

$$\gtreqless A \cdot \text{abs. Max.} \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right),$$

wo A eine endliche Zahl vorstellt (IVa). Es folgt somit aus 59) die Endlichkeit von $\frac{\partial W}{\partial x}$ für jeden beliebigen Punkt des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an ω herantreten kann,*) falls wir uns nur in endlicher Entfernung von der Kurve (den Kurven**) σ halten.

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial W}{\partial x}$ kann nach Ia) nur in Frage kommen, wenn der Punkt (xyz) von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantritt.

Es sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Fläche, der nicht gerade auf der Kurve (auf einer der Kurven) σ liegt, ν_0 seine positive Normale, $\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_+$ und $\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_-$ resp. die Werte von $\frac{\partial W}{\partial x}$, wenn man (xyz) von der positiven oder negativen Seite unendlich nahe an $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ herantreten lässt, dann folgt aus 59):

$$60) \quad \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_- - \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_+ = -4\pi \left\{ \left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right|_0 - \cos(\nu_0 x) \left[\left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right|_0 \cos(\nu_0 x) + \left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\right|_0 \cos(\nu_0 y) + \left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\right|_0 \cos(\nu_0 z) \right] \right\},^{(10)}$$

wo wir durch den Index null andeuten, dass die betreffenden Funktionen an der Stelle $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zu nehmen sind. Denn das erste Integral rechts in 59) ist in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ stetig, für das zweite Integral ist nach Vb):

$$|\text{Wert}|_- - |\text{Wert}|_+ = 4\pi \cos(\nu_0 x) \left[\left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right|_0 \cos(\nu_0 x) + \left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\right|_0 \cos(\nu_0 y) + \left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\right|_0 \cos(\nu_0 z) \right],^{(10)}$$

---

*) Vgl. Anm. 1, S. 40.

**) Zu denen wir jetzt nach Vb) auch die Trennungskurven von Flächenteilen zu rechnen haben, auf denen $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$, $\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}$, $\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}$, $\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}$ eindeutig und stetig sind.

für das dritte nach IV b):

$$\text{Wert}_- - \text{Wert}_+ = -4\pi \left|\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right|_0 .$$

Wir erhalten somit das Resultat:

IV c)*) Die ersten Ableitungen des Flächenintegrales

$$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

nach x, y, z sind für jeden Punkt (xyz) des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann, stets endlich, falls $\varkappa$ auf ω mit seinen ersten Ableitungen abteilungsweise eindeutig und stetig und mit seinen zweiten Ableitungen überall endlich ist.

Sie sind, bei Vermeidung der Fläche ω selbst, für jeden Punkt (xyz) des Raumes eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Oberfläche herantreten kann. Bei dem Durchgange durch die Fläche werden dagegen die Funktionen $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$ Sprünge erleiden, und zwar gelten, wenn man mit:

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_+, \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_+, \left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|_+$$

resp.

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_-, \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_-, \left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|_-$$

die Werte bezeichnet, welche

$$\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$$

annehmen, wenn man (xyz) einem Punkte ($\xi\eta\zeta$) der Fläche ω von der positiven resp. negativen Seite unendlich nähert, die Relationen:

---

*) Wir bezeichnen den Satz, da er die Fortsetzung von IV a) und IV b) bildet, als den Satz IV c).

$$
61)\quad\begin{cases}
\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{-}-\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{+}=-4\pi\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}-\cos(\nu x)\left[\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(\nu x)+\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(\nu y)+\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(\nu z)\right]\right\},\ (^{10})\\
\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{-}-\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{+}=-4\pi\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}-\cos(\nu y)\left[\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(\nu x)+\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(\nu y)+\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(\nu z)\right]\right\},\\
\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{-}-\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{+}=-4\pi\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}-\cos(\nu z)\left[\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(\nu x)+\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(\nu y)+\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(\nu z)\right]\right\},\\
\left|\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{-}-\left|\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{+}=0.
\end{cases}
$$

Der Satz wird im allgemeinen, sowohl in bezug auf die Endlichkeit der Funktionen $\frac{\partial W}{\partial x}, \frac{\partial W}{\partial y}, \frac{\partial W}{\partial z}$, als auch in bezug auf die Gültigkeit der Formeln 61) eine Ausnahme erleiden, wenn man den Punkt (xyz) gerade einem Punkte der Randkurve von ω oder derjenigen Kurven unendlich nähert, welche ω in Teile zerlegen, auf denen die Funktionen $\varkappa$ mit ihren ersten Ableitungen und $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ eindeutig und stetig sind.(9)

§ 4.

Aus den Sätzen Vb) und IVc) ergiebt sich nunmehr unter Benutzung der Formel 54) das folgende Resultat für die zweiten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V=\int_{\omega}\frac{H\,d\omega}{r}:$$

Vc) Die zweiten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V=\int_{\omega}\frac{H\,d\omega}{r}$$

nach x, y, z sind für jeden Punkt (xyz) des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann, stets endlich, falls H mit seinen ersten Ableitungen auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig und mit seinen zweiten Ableitungen überall endlich ist. Sie sind

bei Vermeidung der Fläche ω selbst, für jeden Punkt (xyz) des Raumes eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann. Bei dem Durchgange durch die Fläche werden dagegen die Funktionen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}$$

Sprünge erleiden, und zwar gelten, wenn man mit:

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_+$$

resp.

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_-$$

die Werte derselben bezeichnet, wenn man (xyz) einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche ω von der positiven oder negativen Seite unendlich nähert, die Relationen:(11)

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_+ = 4\pi H\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big) - \cos^2(\nu x)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big)\right]\right\} + 8\pi \cos(\nu x)\,\frac{\partial H}{\partial \xi},$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_+ = 4\pi H\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big) - \cos^2(\nu y)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big)\right]\right\} + 8\pi \cos(\nu y)\,\frac{\partial H}{\partial \eta},$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_+ = 4\pi H\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big) - \cos^2(\nu z)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big)\right]\right\} + 8\pi \cos(\nu z)\,\frac{\partial H}{\partial \zeta};$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}\right|_+ = 4\pi H\left\{\frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu z)\big) - \cos(\nu y)\cos(\nu z)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big)\right]\right\} + 4\pi\left\{\cos(\nu y)\frac{\partial H}{\partial \zeta} + \cos(\nu z)\frac{\partial H}{\partial \eta}\right\},$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}\right|_+ = 4\pi H\left\{\frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu x)\big) - \cos(\nu z)\cos(\nu x)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big)\right]\right\} + 4\pi\left\{\cos(\nu z)\frac{\partial H}{\partial \xi} + \cos(\nu x)\frac{\partial H}{\partial \zeta}\right\},$$

$$\left|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}\right|_+ = 4\pi H\left\{\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu y)\big) - \cos(\nu x)\cos(\nu y)\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\big(\cos(\nu x)\big)\right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{\partial}{\partial \eta}\big(\cos(\nu y)\big) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\big(\cos(\nu z)\big)\right]\right\} + 4\pi\left\{\cos(\nu x)\frac{\partial H}{\partial \eta} + \cos(\nu y)\frac{\partial H}{\partial \xi}\right\}.$$

Der Satz wird im allgemeinen, sowohl in bezug auf die Endlichkeit jener Funktionen als auch in bezug auf die Gültigkeit der letzten Formeln eine Ausnahme erleiden, wenn man den Punkt (xyz) gerade einem Punkte der Randkurve oder derjenigen Kurven unendlich nähert, welche ω in Teile zerlegen, auf denen die Funktionen H, $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ und ihre ersten Ableitungen*) eindeutig und stetig sind.(9)

§ 5.

In gleicher Weise folgt aus der Formel 59) mit Hilfe der Sätze IV c) und V c) das folgende Resultat für die zweiten Ableitungen des Flächenintegrales:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega :$$

IV d) Die zweiten Ableitungen des Flächenintegrales:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

nach x, y, z sind für jeden Punkt (xyz) des Raumes, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche ω herantreten kann, stets endlich, falls $\varkappa$ mit seinen ersten und zweiten Ableitungen auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig und mit seinen dritten Ableitungen überall endlich ist. Sie sind, bei Vermeidung der Fläche ω selbst, für jeden Punkt (xyz) des Raumes eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Oberfläche herantreten kann. Bei dem Durchgange durch die Fläche werden dagegen die Funktionen

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial z^2}, \frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Sprünge erleiden, und zwar gelten, wenn man mit

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}\right|_+, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_+$$

resp.

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial z^2}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial y \partial z}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial z \partial x}\right|_-, \left|\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}\right|_-$$

---

*) Für die Sätze V c) und IV d) nehmen wir stillschweigend die Voraussetzung hinzu, dass die ersten Ableitungen von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen endlich sind.

die Werte derselben bezeichnet, wenn man (xyz) einem Punkte ($\xi\eta\zeta$) der Fläche ω von der positiven oder negativen Seite unendlich nähert, die Relationen:(12)

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right|_+ = 4\pi\left\{\cos(\nu x)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\cos(\nu x)\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}\cos(\nu x)\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\cos(\nu x)\right)\right]-\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\xi^2}\right\}, \ldots$$

$$\left|\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}\right|_- - \left|\frac{\partial^2 W}{\partial y\partial z}\right|_+ = 4\pi\left\{\cos(\nu z)\left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}\cos(\nu y)\right)+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}\cos(\nu y)\right)+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\cos(\nu y)\right)\right]-\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\eta\partial\zeta}\right\}, \ldots$$

Der Satz wird im allgemeinen sowohl in bezug auf die Endlichkeit jener Funktionen als auch in bezug auf die Gültigkeit der letzten Formeln eine Ausnahme erleiden, wenn man den Punkt (xyz) gerade einem Punkte der Randkurve oder derjenigen Kurven unendlich nähert, welche ω in Teile zerlegen, auf denen die Funktionen

$\varkappa$, ihre ersten und zweiten Ableitungen,
$\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ und ihre ersten Ableitungen*) eindeutig und stetig sind.(9)

4. Kapitel.

Das Raumpotential und seine Ableitungen.

§ 1.

Wir untersuchen jetzt das Raumpotential, also das Raumintegral:

$$62)\quad V(x, y, z) = \int_\tau \frac{E\,d\tau}{r},$$

wobei $d\tau$ (ξ, η, ζ) ein Element des gegebenen Raumes τ, E eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle in demselben, r die Entfernung des variablen Punktes (xyz) von $d\tau$ vorstellt.

Wir wissen zunächst nicht, ob V für Punkte des Raumes τ selbst einen Sinn hat, und untersuchen die Funktion für äußere Punkte (xyz).

---

*) Vgl. Anm. S. 51.

Es ist zunächst:

$$63)\quad \text{abs. V} \leqq \text{abs. Max.}\ (E) \cdot \overline{\text{V}},$$

wo:

$$64)\quad \overline{\text{V}} = \int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r}$$

und abs. Max. (E) der absolut gröfste Wert ist, den E überhaupt in dem Raume τ hat. Das einfachere Potential $\overline{\text{V}}$ formen wir um, indem wir von der folgenden Identität ausgehen:

$$65)\quad \frac{1}{r} \equiv -\frac{1}{2}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\big(\cos(rx)\big) + \frac{\partial}{\partial\eta}\big(\cos(ry)\big) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\big(\cos(rz)\big)\right\}.$$

Es wird mit Hilfe derselben:

$$\overline{\text{V}} = -\frac{1}{2}\int\limits_{\tau}\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\big(\cos(rx)\big) + \frac{\partial}{\partial\eta}\big(\cos(ry)\big) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\big(\cos(rz)\big)\right\} d\tau,$$

oder mit Hilfe des Theorems von Green (Satz C. Seite 18):

$$66)\quad \overline{\text{V}} = \frac{1}{2}\int\limits_{\omega} \cos(r\nu)\, d\omega,$$

wo $d\omega$ ein Element der Oberfläche von τ, ν seine innere Normale vorstellt.

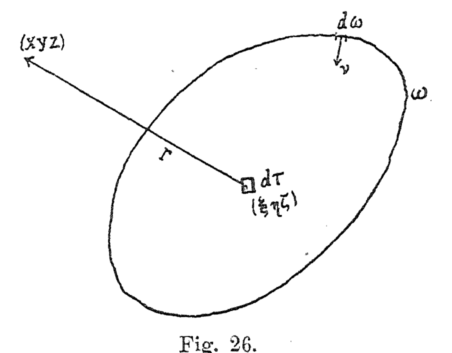


Fig. 26.

Da $\cos(r\nu)$ seinem absoluten Werte nach stets $\leqq 1$ ist, folgt:

$$67)\quad \overline{\text{V}} \leqq \frac{1}{2}\,\omega,$$

wenn ω den Flächeninhalt der Oberfläche von τ vorstellt, und:

$$68)\quad \text{abs. V} \leqq \frac{1}{2}\ \text{abs. Max.}\ (E) \cdot \omega.$$

Es folgt hieraus, dass V auch endlich bleibt, wenn der Punkt (xyz) von aufsen unendlich nahe an die Oberfläche ω herantritt.

Um nun auch dem Integrale V für innere Punkte einen Sinn zu geben, müssen wir eine Betrachtung über sogenannte uneigentliche Integrale einschalten.

§ 2.

Man giebt in der Theorie der bestimmten Integrale dem Integrale:

$$J = \int_0^a \frac{dx}{x^{1-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

den Wert:

$$J = \frac{1}{\lambda} a^{\lambda},$$

indem man in der Formel:

$$\int_0^a \frac{dx}{x^{1-\lambda}} = \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x^{1-\lambda}} + \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x^{1-\lambda}},$$

$$69) \quad \lim_{\varepsilon=0} \int_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x^{1-\lambda}} = 0, \quad \lambda > 0$$

setzt, und man bezeichnet das Integral J, das infolge der Gleichung 69) auch so geschrieben werden kann:

$$70) \quad J \equiv \int_0^a \frac{dx}{x^{1-\lambda}} = \lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^a \frac{dx}{x^{1-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

als ein uneigentliches Integral.

Wir betrachten nun in der xy Ebene das Integral:

$$\int_{\omega} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

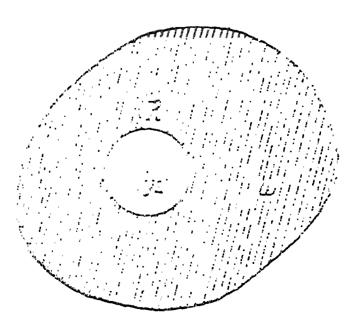


Fig. 27.

wo $d\omega$ $(\eta\zeta)$ irgend ein Element eines ebenen Flächenstückes ω, r seinen Abstand von dem variabeln Punkt (y, z) vorstellt. Wir wollen zeigen, dass wir nach der Festsetzung 69) auch dieses Integral für innere Punkte als uneigent-

liches Integral auffassen können, d. h. dass man, nachdem man aus der Fläche ω eine kleine Kreisfläche (R) um (yz) als Centrum ausgeschnitten hat,

$$71)\quad \int\limits_{\omega} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} = \lim_{R=0} \int\limits_{\omega-(R)} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

setzen kann. (Die Fläche $\omega - (R)$ ist in der Figur schraffiert.) Um dies zu zeigen, denken wir uns von (yz) an die Randpunkte eines Elementes $d\sigma$ der Randkurve σ von ω die Graden gelegt und ferner die Kreise mit den Radien r und r + dr um (yz) als Centrum. Das durch diese vier Linien begrenzte Element $d\omega$ ist:

$$d\omega = r\,dr\,d\varphi,$$

wenn $d\varphi$ der kleine Winkel ist, unter dem $d\sigma$ in (yz) erscheint. Es wird somit für (xyz):

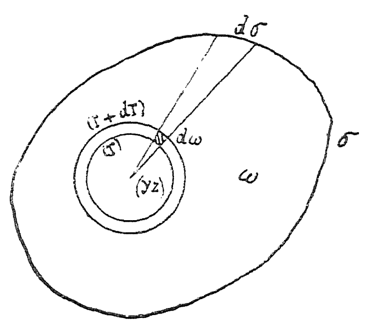


Fig. 28.

$$\int\limits_{\omega} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} = \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{0}^{\varrho} \frac{dr}{r^{1-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

oder nach 70):

$$\int\limits_{\omega} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} = \lim_{R=0} \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi \int\limits_{R}^{\varrho} \frac{dr}{r^{1-\lambda}},$$

$$= \lim_{R=0} \int\limits_{\omega-(R)} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

so dass also aus 69) die Formel 71) folgt, die mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$72)\quad \lim_{R=0} \int\limits_{(R)} \frac{d\omega}{r^{2-\lambda}} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Wir betrachten weiter das Integral:

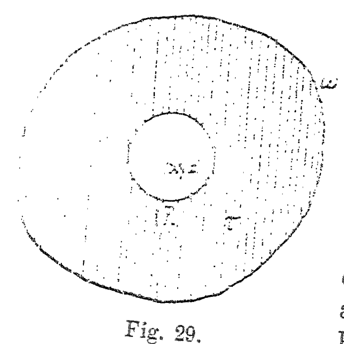


Fig. 29.

$$\int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

wo $d\tau$ $(\xi\eta\zeta)$ irgend ein Element eines Raumgebietes τ, r seinen Abstand von dem variabeln Punkte (xyz) vorstellt. Wir wollen zeigen, dass wir nach der Festsetzung 69) auch dieses Integral für innere Punkte als uneigentliches Integral auffassen können, d. h. dass man, nachdem man aus dem Raume τ eine kleine Kugel Ⓡ um (xyz) als Centrum ausgeschnitten hat,

$$73) \quad \int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \lim_{R=0} \int\limits_{\tau - (R)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

setzen kann. (Der Raum τ — Ⓡ ist in der Figur schraffiert.)

Um dies zu zeigen, denken wir uns den von (xyz) an die Randkurve eines Elementes $d\omega$ der Oberfläche ω von τ gehenden elementaren Kegel und ferner die Kugelflächen mit den Radien r und $r + dr$ um (xyz) als Centrum. Das durch diese drei Flächen begrenzte Element $d\tau$ ist:

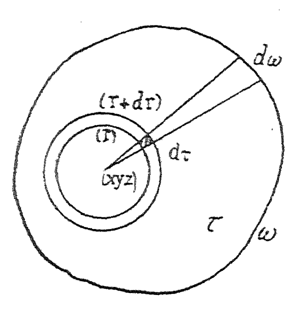


Fig. 30.

$$d\tau = r^2 dr\, do,$$

wenn do die scheinbare Größe von $d\omega$ in (xyz) vorstellt. Es wird somit für (xyz):

$$\int\limits_{\tau} \frac{d\tau}{r^{r-\lambda}} = \int do \int\limits_{0}^{\varrho} \frac{dr}{r^{1-\lambda}}, \quad \lambda > 0$$

oder nach 70):

$$\int_{\tau} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = \lim_{R=o} \int do \int_{R}^{\varrho} \frac{dr}{r^{1-\lambda}},$$

$$= \lim_{R=o} \int_{\tau - (R)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}}, \quad \lambda > 0,$$

so dass also aus 69) die Formel 73) folgt, die mit der folgenden gleichbedeutend ist:

$$74) \quad \lim_{R=o} \int_{(R)} \frac{d\tau}{r^{3-\lambda}} = 0, \quad \lambda > 0.$$

Im besonderen ergiebt sich aus 74) für

$\lambda = 1$ und $\lambda = 2$:

$$75) \quad \lim_{R=o} \int_{(R)} \frac{d\tau}{r^2} = 0,$$

$$76) \quad \lim_{R=o} \int_{(R)} \frac{d\tau}{r} = 0.$$

§ 3.

Wir untersuchen nach dieser Abschweifung das Raumpotential

$$V = \int_{\tau} \frac{E\, d\tau}{r}$$

für innere Punkte (xyz). Es besteht wie früher (Formel 63) die Ungleichung:

$$77) \quad \text{abs. } V \leqq \text{abs. Max. } (E) \cdot \overline{V},$$

wo:

$$78) \quad \overline{V} = \int_{\tau} \frac{d\tau}{r}$$

und abs. Max. (E) der absolut gröfste Wert von E ist. Man kann nun nach 76) $\overline{V}$ als ein uneigentliches Integral auffassen, so

dass nach Konstruktion einer kleinen Kugel mit dem Radius R um (xyz) als Centrum:

$$79)\quad \bar{V} = \lim_{\substack{R=0 \\ \tau - (R)}} \int \frac{d\tau}{r}.$$

Für den Raum $\tau - (R)$ ist nun (vgl. Fig. 29) (xyz) ein äufserer Punkt, es ist somit nach 67):

$$\bar{V} \gtreqless \frac{1}{2} (\omega + 4\pi R^2) \Big|_{\lim R=0}$$

oder:

$$80)\quad \bar{V} \gtreqless \frac{1}{2} \omega,$$

$$81)\quad \text{abs. } V \gtreqless \frac{1}{2} \cdot \text{abs. Max. } (E)\omega,$$

wo ω den Flächenraum der Oberfläche ω von τ vorstellt; wir erhalten dieselbe Formel 68), wie für äufsere Punkte, und es folgt aus derselben, dass V auch für innere Punkte überall endlich ist; wir brauchen hier, da die Formel 81) nicht die Stetigkeit von E voraussetzt, den Fall, dass (xyz) gerade auf der Fläche ω liegt, nicht auszuschliefsen.

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion V kann nach Satz Ia) nur in Frage kommen, wenn der Punkt (xyz) von aufsen unendlich nahe an die Oberfläche ω von τ heranrückt oder in das Innere von τ hineintritt.

Es sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Oberfläche ω oder im Innern von τ; wir teilen durch eine Fläche Σ den Raum τ in zwei Teile τ_1 und τ_2, von denen der zweite $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ enthält, während der erste durch irgend welche Entfernungen von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ getrennt sei; die von den beiden Teilen des Raumes herrührenden Potentiale seien V_1 und V_2. Nun ist zunächst V_1 in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutig und stetig, während V_2 wegen der nach 81) geltenden Ungleichung:

$$\text{abs. } V_2 \gtreqless \frac{1}{2} \Sigma \cdot \text{abs. Max. } (E)$$

durch Verkleinerung von Σ unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden kann.

Es folgt daraus, dass V in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutig und stetig ist.

VIa) Das Raumpotential:

$$V = \int_\tau \frac{E\,d\tau}{r}$$

ist für jeden Punkt des Raumes, der auch von aufsen an die Oberfläche des Gebietes τ unendlich nahe heranrücken, auf der Oberfläche selbst liegen oder in das Innere von τ hineintreten kann, eindeutig und stetig.

§ 4.

Wir wenden uns nun den ersten Ableitungen des Raumpotentiales zu:

$$82)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = -\displaystyle\int_\tau E \frac{\cos(rx)}{r^2}\,d\tau, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial y} = -\displaystyle\int_\tau E \frac{\cos(ry)}{r^2}\,d\tau, \\[2ex] \dfrac{\partial V}{\partial z} = -\displaystyle\int_\tau E \frac{\cos(rz)}{r^2}\,d\tau, \end{cases}$$

und zwar beschäftigen wir uns zunächst mit $\frac{\partial V}{\partial x}$, die Untersuchungen für $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ sind völlig analog.

Es ist:

$$83)\quad \text{abs.}\, \frac{\partial V}{\partial x} < \text{abs. Max.}\,(E) \int_\tau \frac{d\tau}{r^2};$$

da für innere Punkte das Integral $\int_\tau \frac{d\tau}{r^2}$ nach 75) als uneigentliches Integral aufgefasst werden darf, können wir unsere Betrachtungen für beide Fälle, dass (xyz) ein äufserer oder innerer Punkt ist, zusammenfassen. Es ist identisch:

$$84)\quad \frac{1}{r^2} \equiv -\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{\cos(rx)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\cos(ry)}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{\cos(rz)}{r}\right)\right],$$

somit unter Anwendung des Theorems C. von Green (S. 18) für äufsere Punkte (xyz):

$$\int_\tau \frac{dt}{r^2} = \int_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r}\, d\omega,$$

wo ν die innere Normale eines Elementes $d\omega$ der Oberfläche ω von τ vorstellt, und für innere Punkte (xyz):

$$\int_\tau \frac{d\tau}{r^2} = \lim_{R=0} \cdot \left(\int_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r}\, d\omega - 4\pi R\right)^{(13)},$$

also in beiden Fällen:

$$85) \quad \int_\tau \frac{d\tau}{r^2} = \int_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r}\, d\omega,$$

und nach 83):

$$86) \quad \text{abs.}\, \frac{\partial V}{\partial x} \overline{\underline{<}}\ \text{abs. Max.}\,(E) \cdot \int_\omega \frac{\cos(r\nu)}{r}\, d\omega.$$

Das Integral rechts ist als Flächenpotential nach Va) stets endlich für jeden Punkt (xyz) des Raumes, der auch von innen oder aufsen unendlich nahe an die Oberfläche ω heranrücken darf; wir brauchen auch hier, da unser Beweis nicht die Stetigkeit von E voraussetzt, den Fall, dass (xyz) gerade auf der Fläche ω liegt, nicht auszuschliefsen.

Die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktion $\frac{\partial V}{\partial x}$ kann nach Ia) nur in Frage kommen, wenn der Punkt (xyz) von aufsen unendlich nahe an die Oberfläche ω von τ heranrückt oder in das Innere von τ hineintritt.

Es sei nun $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Oberfläche ω oder im Inneren von τ; wir teilen durch eine Fläche Σ den Raum τ in zwei Teile τ_1 und τ_2, von denen der zweite $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ enthält, während der erste durch irgend welche Entfernungen von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ getrennt sei; die von den beiden Teilen des Raumes herrührenden Teile von $\frac{\partial V}{\partial x}$ seien $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ und $\frac{\partial V_2}{\partial x}$. Nun ist zunächst $\frac{\partial V_1}{\partial x}$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutig und stetig, während $\frac{\partial V_2}{\partial x}$ wegen der nach 86) geltenden Ungleichung:

$$\text{abs.}\ \frac{\partial V_2}{\partial x} \lesseqgtr \text{abs. Max.}\ (E) \cdot \int\limits_{\Sigma} \frac{\cos(r\nu)}{r}\, d\omega$$

durch Verkleinerung von Σ unter jeden beliebig kleinen Wert*) herabgedrückt werden kann. Es folgt daraus, dass $\frac{\partial V}{\partial x}$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eindeutig und stetig ist.

VIb) Die ersten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V = \int\limits_{\tau} E\, \frac{d\tau}{r}$$

sind für jeden Punkt des Raumes, der auch von aufsen an die Oberfläche des Gebietes τ unendlich nahe heranrücken, auf der Oberfläche selbst liegen oder in das Innere von τ hineintreten kann, eindeutig und stetig.

§ 5.

Wir untersuchen nun die zweiten Ableitungen des Raumpotentials, und zwar zunächst die ersten Ableitungen der Funktion:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\int\limits_{\tau} E\, \frac{\cos(rx)}{r^2}\, d\tau,$$

die Betrachtungen für die ersten Ableitungen von $\frac{\partial V}{\partial y}$ und $\frac{\partial V}{\partial z}$ sind völlig analog.

Wir setzen die ersten Ableitungen von E als in dem Raum τ überall endlich voraus und bedienen uns zur Umformung des Integrales $\frac{\partial V}{\partial x}$ der Identität:

$$87)\quad -E\,\frac{\cos(rx)}{r^2} \equiv -\frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{E}{r}\right) + \frac{\partial E}{\partial \xi} \cdot \frac{1}{r}.$$

Es folgt nach derselben mit Hilfe des Green'schen Satzes C. (Seite 18) für äufsere Punkte (xyz):

*) Man vergleiche den Beweis des Satzes Va).

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_\omega \frac{E \cos(\nu x)}{r} d\omega^{*)} + \int_\tau \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r},$$

wo das erste Integral über alle Elemente $d\omega$ (mit der inneren Normalen ν) der Oberfläche ω von τ zu erstrecken ist, für innere Punkte:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{R=0} \left[\int_{\omega-(R)} \frac{E \cos(\nu x)}{r} d\omega^{*)} + \int_{\tau-(R)} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r} \right],$$

$$= \int_\omega \frac{E \cos(\nu x)}{r} d\omega^{*)} + \int_\tau \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r},$$

also in beiden Fällen:

analog:

$$88) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial x} = \displaystyle\int_\omega \frac{E \cos(\nu x)}{r} d\omega^{*)} + \int_\tau \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial y} = \displaystyle\int_\omega \frac{E \cos(\nu y)}{r} d\omega^{*)} + \int_\tau \frac{\partial E}{\partial \eta} \frac{d\tau}{r}, \\ \dfrac{\partial V}{\partial z} = \displaystyle\int_\omega \frac{E \cos(\nu z)}{r} d\omega^{*)} + \int_\tau \frac{\partial E}{\partial \zeta} \frac{d\tau}{r}, \end{cases}$$

wo stets ν die innere Normale von $d\omega$ vorstellt.

Nach der ersten dieser Formeln lassen sich die zweiten Ableitungen:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$$

in folgender Weise darstellen:

$$89) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \dfrac{\partial X}{\partial x} + \dfrac{\partial \Xi}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial X}{\partial y} + \dfrac{\partial \Xi}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} = \dfrac{\partial X}{\partial z} + \dfrac{\partial \Xi}{\partial z}, \end{cases}$$

wo:

---

*) Hier sind, falls E innerhalb τ nur abteilungsweise eindeutig und stetig ist, zu ω auch die beiden Seiten der Trennungsflächen von Raumteilen hinzuzurechnen, in denen E eindeutig und stetig ist.

$$90)\quad X=\int\limits_{\omega} E\cos(\nu x)\,\frac{d\omega}{r},\text{*)}$$

$$91)\quad \Xi=\int\limits_{\tau} \frac{\partial E}{\partial \xi}\,\frac{d\tau}{r}.$$

Da X ein Flächenpotential, Ξ ein Raumpotential ist, können wir nach Vb) und VIb) sofort die uns interessierenden Eigenschaften der zweiten Ableitungen $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z}$ angeben. Nach Vb) sind die ersten Ableitungen von X in dem ganzen Raume bei Vermeidung der Fläche (der Flächen) ω selbst eindeutig und stetig, wobei man den variabeln Punkt (xyz) auch unendlich nahe von der einen oder anderen Seite an die Fläche (die Flächen) ω herantreten lassen kann; für die Randwerte zu beiden Seiten der Fläche gelten die Formeln:

$$92)\quad \begin{cases} \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{-} - \left|\frac{\partial X}{\partial x}\right|_{+} = 4\pi E\cos^2(\nu x), \\ \left|\frac{\partial X}{\partial y}\right|_{-} - \left|\frac{\partial X}{\partial y}\right|_{+} = 4\pi E\cos(\nu y)\cos(\nu x), \\ \left|\frac{\partial X}{\partial z}\right|_{-} - \left|\frac{\partial X}{\partial z}\right|_{+} = 4\pi E\cos(\nu z)\cos(\nu x), \end{cases}$$

immer bei Vermeidung von Trennungskurven stetig gekrümmter Teile der Flächen ω.

Nach VIb) sind ferner die ersten Ableitungen von Ξ im ganzen Raume eindeutig und stetig, es ergiebt sich somit für die zweiten Ableitungen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},\quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z},$$

und analog für die übrigen zweiten Ableitungen von V das folgende Resultat:

VIc) Die zweiten Ableitungen des Raumpotentiales:

$$V=\int\limits_{\tau} E\,\frac{d\tau}{r}$$

*) Vgl. Anm. S. 62.

sind, unter Vermeidung der Oberfläche ω des Raumes τ und der Flächen, welche den Raum τ in Teile zerlegen, in denen E stetig ist(*), für jeden Punkt (xyz) eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche (die Flächen*)) ω herantreten darf. Dieselben werden jedoch im allgemeinen bei dem Durchgange durch die Fläche (die Flächen) ω Sprünge erleiden, und zwar gelten, wenn man mit

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_+, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_+, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_+, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_+, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\right|_+, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right|_+, \quad E_+,$$

resp.

$$\left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_-, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_-, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_-, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_-, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\right|_-, \quad \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right|_-, \quad E_-,$$

die Werte von

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y}, \quad E$$

bezeichnet, wenn (xyz) von der inneren oder äufseren Seite**) an einem Punkt der Fläche (der Flächen) ω unendlich nahe heranrückt, die Formeln:

$$93)\quad \begin{cases} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_- - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_+ = 4\pi E \cos^2(\nu x), \quad \text{resp.} = 4\pi\,(E_+ - E_-)\cos^2(\nu x), \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_- - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_+ = 4\pi E \cos^2(\nu y), \quad \text{resp.} = 4\pi\,(E_+ - E_-)\cos^2(\nu y), \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_- - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_+ = 4\pi E \cos^2(\nu z), \quad \text{resp.} = 4\pi\,(E_+ - E_-)\cos^2(\nu z), \end{cases}$$

$$94)\quad \begin{cases} \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\right|_- - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial y\partial z}\right|_+ = 4\pi E \cos(\nu y)\cos(\nu z), \\ \qquad\qquad \text{resp.} = 4\pi\,(E_+ - E_-)\cos(\nu y)\cos(\nu z), \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}\right|_- - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial z\partial x}\right|_+ = 4\pi E \cos(\nu z)\cos(\nu x), \\ \qquad\qquad \text{resp.} = 4\pi\,(E_+ - E_-)\cos(\nu z)\cos(\nu x), \\ \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right|_- - \left.\frac{\partial^2 V}{\partial x\partial y}\right|_+ = 4\pi E \cos(\nu x)\cos(\nu y), \\ \qquad\qquad \text{resp.} = 4\pi\,(E_+ - E_-)\cos(\nu x)\cos(\nu y). \end{cases}$$

---

*) Für die Flächen, welche den Raum τ in Teile zerlegen, in denen E eindeutig und stetig ist, ist es nach den folgenden Formeln gleichgültig, welche Seite derselben man als innere oder äufsere bezeichnet.

**) Über die Werte auf der Fläche (den Flächen) ω s. Seite 76.

Der Satz wird im allgemeinen sowohl in bezug auf die Eindeutigkeit und Stetigkeit der Funktionen

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y},$$

als auch in bezug auf die Gültigkeit der Formeln 93), 94) eine Ausnahme erleiden, wenn man den Punkt (xyz) gerade einer der Trennungskurven stetig gekrümmter Teile der Flächen ω unendlich nähert.

§ 6.

Der Sprung, den nach dem Satze VIc) der Ausdruck:

$$95) \quad \varDelta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

bei dem Durchgange durch die Oberfläche ω erleidet, ist:

$$|\varDelta V|_- - |\varDelta V|_+ = 4\pi E \left(\cos^2(\nu x) + \cos^2(\nu y) + \cos^2(\nu z)\right) = 4\pi E,$$

und da $|\varDelta V|_-$ für die Oberfläche ω (nach Ib) null ist, folgt:

$$96) \quad |\varDelta V|_+ = -4\pi E,$$

wo, um dies noch einmal hervorzuheben, $|\varDelta V|_+$ den Wert von $\varDelta V$ vorstellt, wenn der Punkt (xyz) von innen unendlich nahe an einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Oberfläche ω herantritt.

Sei jetzt $(\xi\eta\zeta)$ irgend ein Punkt des Gebietes τ, der durch irgend welche Entfernungen von der Fläche (den Flächen ω) getrennt ist, dann können wir stets eine kleine in dem Raume τ gelegene Kugelfläche (R) konstruieren, die durch den Punkt $(\xi\eta\zeta)$ geht. Diese Kugel teilt den Raum τ in zwei Teile, den Raum:

$$\tau_1 = \tau - \text{(R)}$$

und den Raum:

$$\tau_2 = \text{(R)},$$

der durch den Kugelraum dargestellt wird. Der dem Raume τ_1 zugehörige Teil von V

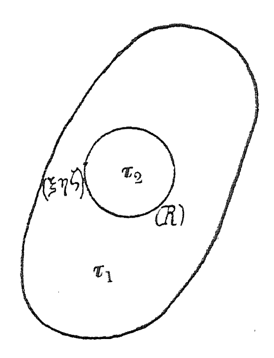


Fig. 31.

heiſse V_1, der dem Raume τ_2 zugehörige Teil V_2, dann ist, falls man den Punkt (xyz) dem Punkte ($\xi\eta\zeta$) von dem Inneren des Kugelraumes aus unendlich nähert:

$$97) \begin{cases} \Delta V_1 = 0 \text{ nach Satz Ib),} \\ \Delta V_2 = -4\pi E \text{ nach 96),} \end{cases}$$

somit:

$$98) \quad \Delta V = -4\pi E.$$

Nun ist nach Voraussetzung E in ($\xi\eta\zeta$) eindeutig und stetig und gleichfalls die zweiten Ableitungen von V nach Satz VIc), sobald man die ersten Ableitungen von E endlich annimmt, die Formel 98) gilt also für den Punkt ($\xi\eta\zeta$), ohne dass man vorauszusetzen braucht, dass (xyz) sich dem Punkte ($\xi\eta\zeta$) von irgend einer bestimmten Seite unendlich nähert. Wir erhalten das Resultat:

VId) Der Laplacesche Differentialausdruck:

$$\Delta V \equiv \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

des Raumpotentiales:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r}$$

entspricht für jeden Punkt des Raumes τ, der auch unendlich nahe von innen an die Oberfläche ω*) herantreten kann, der Formel:

$$\Delta V = -4\pi E,$$

falls E in dem Gebiete τ abteilungsweise eindeutig und stetig und mit seinen ersten Ableitungen endlich ist. Der Satz wird im allgemeinen eine Ausnahme erleiden, falls man den Punkt (xyz) gerade auf einer der Flächen*) annimmt, welche den Raum τ in Teile zerlegen, in denen E eindeutig und stetig ist.

---

*) Über den Wert von ΔV auf der Fläche (den Flächen) ω vgl. S. 78.

III. Abschnitt.
Schlussbemerkungen zum I. Teile.

1. Kapitel.
Über die Werte des Flächenintegrales W, des Flächenpotentiales und ihrer Ableitungen auf der Fläche selbst.

§ 1.

Bei den Sätzen (III, IV, V) über das Flächenintegral:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

und das Flächenpotential:

$$V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r}$$

haben wir bisher den Fall, dass der Punkt (x y z) auf der Fläche ω selbst liege, ausgeschlossen, und wir mussten infolgedessen auch bei den Sätzen VIc) und VId) über die zweiten Ableitungen des Raumpotentiales

$$\int_\tau E \frac{d\tau}{r}$$

den Fall ausschliessen, dass (xyz) auf der Oberfläche ω von τ oder den Flächen liege, welche τ in Teile zerlegen, in denen E eindeutig und stetig ist.

Wir wollen jetzt diese Lücke ausfüllen und zunächst zeigen, dass man V und W auf der Fläche selbst als uneigentliche Integrale definieren darf, d. h. dass man, nach Konstruktion einer kleinen Kurve ς, welche die Fläche ω in zwei Teile ω_1 und ω_2 teilt, von denen der zweite den Punkt (xyz) enthält, während der erste von ihm durch irgend welche Entfernungen getrennt ist, die Integrale so definieren darf:

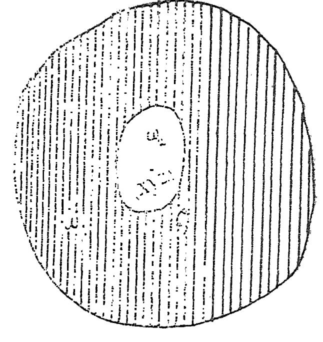


Fig. 32.

$$99)\quad \left\{\begin{aligned} V &\equiv \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r} = \lim_{\omega_2 = 0} \int\limits_{\omega_1} H \frac{d\omega}{r}, \\ W &\equiv \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \lim_{\omega_2 = 0} \int\limits_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \end{aligned}\right.$$

also als den Grenzwert der Integrale über ω_1, wenn man die Kurve ς den Punkt (xyz) immer näher umschliefsen lässt. Um diese Definitionen zu rechtfertigen, müssen wir die Formeln:

$$100)\quad \left\{\begin{aligned} &\lim_{\omega_2 = 0} \int\limits_{\omega_2} H \frac{d\omega}{r} = 0, \\ &\lim_{\omega_2 = 0} \int\limits_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = 0 \end{aligned}\right.$$

als eine Folge der Gleichung:

$$101)\quad \lim_{\varepsilon = 0} \int\limits_0^{\varepsilon} \frac{dx}{x^{1-\lambda}} = 0, \quad \lambda > 0$$

beweisen.

Wir denken uns hierzu im Punkt (xyz), der vorläufig als durch irgend welche Entfernungen von der Randkurve und den Trennungskurven stetig gekrümmter Teile von ω getrennt angenommen werde, die Tangentialebene der Fläche ω und in derselben um (xyz) als Centrum einen Kreis mit dem Radius R. Wir können stets einen genügend kleinen, endlichen Radius R wählen, dass jedes Lot der Ebene in einem Punkte dieser Kreisfläche die Fläche ω nur in einem Punkte schneidet, wenn man die Länge dieser Lote gleichfalls kleiner als eine genügend kleine, endliche Länge wählt. Wir wählen jetzt als Kurve ς die Kurve, welche der in dem Kreise (R) auf der Ebene lotrechte Cylinder aus ω ausschneidet. Es ist dann:

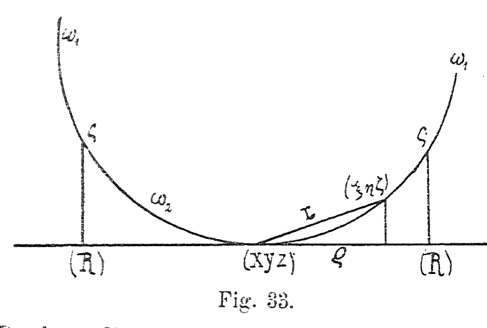


Fig. 33.

$$102)\quad \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r} \leqq \int\limits_{(R)} \frac{do}{\varrho},$$

wenn wir mit ϱ die Entfernung des Fuſspunktes des von $(\xi\eta\zeta)$ auf die Ebene gefällten Lotes von (xyz), mit do die Projektion des Elementes $d\omega$ auf dieselbe Ebene bezeichnen, denn es ist einzeln:

$$d\omega \leqq do,$$

$$r \geqq \varrho,$$

$$\frac{1}{r} \leqq \frac{1}{\varrho}.$$

Nun folgt aus 101):

$$103)\quad \lim_{R=0} \int\limits_{(R)} \frac{do}{\varrho} = 0, \text{ vgl. Formel 72)}$$

und aus 102) und 103):

$$104)\quad \lim_{\omega_2=0} \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r} = 0,$$

und daraus die erste Formel 100), da:

$$\text{abs.} \left[\int\limits_{\omega_2} H \frac{d\omega}{r} \right] \leqq \text{abs. Max.} (H) \int\limits_{\omega_2} \frac{d\omega}{r}.$$

Da der Beweis nur die Endlichkeit, nicht die Stetigkeit von H voraussetzt, kann (xyz) auch auf der Randkurve oder einer Trennungskurve stetig gekrümmter Teile von ω liegen.

Zum Beweise der zweiten Formel 100) bemerken wir, dass wir zunächst R genügend klein wählen können, so dass für jeden Punkt auf ω_2, der vorläufig als von der Randkurve und den Trennungskurven stetig gekrümmter Teile von ω durch irgend welche Entfernungen getrennt angenommen werde,

$$105)\quad \cos(\nu r) = r \left\{ \cos(rx)\, F_1 + \cos(ry)\, F_2 + \cos(rz)\, F_3 + \Delta \right\},$$

wo:

$$
106)\quad \begin{cases}
F_1 = \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(\nu x)\big)\cos(rx) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(\nu x)\big)\cos(ry) \\
\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\big(\cos(\nu x)\big)\cos(rz), \\
F_2 = \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(\nu y)\big)\cos(rx) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(\nu y)\big)\cos(ry) \\
\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\big(\cos(\nu y)\big)\cos(rz). \\
F_3 = \frac{\partial}{\partial x}\big(\cos(\nu z)\big)\cos(rx) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\cos(\nu z)\big)\cos(ry) \\
\qquad\qquad + \frac{\partial}{\partial z}\big(\cos(\nu z)\big)\cos(rz)
\end{cases}
$$

und Δ durch Verkleinerung von R unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden kann. Infolge 105) wird:

$$
107)\quad \int\limits_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \int\limits_{\omega_2} \frac{\Psi}{r}\, d\omega,
$$

wo Ψ eine stets endliche Funktion von $(\xi\eta\zeta)$ vorstellt. Es folgt hieraus nach der ersten Formel 100):

$$
\lim_{\omega_2=0} \int\limits_{\omega_2} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = 0;
$$

das ist die zu beweisende zweite Formel 100). Da wir wiederum für den Beweis nur die Endlichkeit, nicht die Stetigkeit von $\varkappa$ vorauszusetzen brauchen, brauchen wir den Fall, dass (xyz) auf der Randkurve oder einer Trennungskurve stetig gekrümmter Teile von ω liegt, nicht auszuschliefsen. Nachdem so bewiesen ist, dass die Integrale V und W für alle Punkte der Fläche, einschliefslich der Randkurve und der Trennungskurven stetig gekrümmter Teile von ω, als uneigentliche Integrale aufgefasst werden dürfen, wollen wir dies auch von den Funktionen:

$$
\frac{\partial V}{\partial x} = -\int\limits_{\omega} H \frac{\cos(rx)}{r^2}\, d\omega,
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial y} = -\int\limits_{\omega} H \frac{\cos(ry)}{r^2}\, d\omega,
$$

$$
\frac{\partial V}{\partial z} = -\int\limits_{\omega} H \frac{\cos(rz)}{r^2}\, d\omega
$$

nachweisen, hier aber unter Ausschluss von Punkten der Randkurve und der Trennungskurven von Teilen der Fläche, auf welchen

$$H, \cos(\nu x), \cos(\nu y), \cos(\nu z)$$

eindeutig und stetig sind, und unter Annahme endlicher erster Ableitungen von H.

Wir werden die Behauptung für $\frac{\partial V}{\partial x}$ bewiesen haben, wenn wir die Formel:

$$108)\quad \lim_{\omega_2=0} \int\limits_{\omega_2} (-H) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega = 0$$

als eine Folge von 101) darstellen können.

Wir denken uns, wie früher, in einem Punkte (xyz) der Fläche, in dem H, $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ eindeutig und stetig sind, und der nicht auf der Randkurve liegt, die Tangentialebene der Fläche ω und in derselben um (xyz) als Centrum einen Kreis von genügend kleinem Radius R, so dass jedes Lot der Ebene in einem Punkte dieser Kreisfläche die Fläche ω nur in einem Punkte schneidet, wenn man die Länge dieser Lote gleichfalls kleiner als eine genügend kleine endliche Länge wählt. Wir wählen weiter wie früher als Begrenzungskurve von ω_2 die Kurve ς, welche der in dem Kreise (R) auf der Ebene lotrechte Cylinder aus ω ausschneidet (Fig. 33). Bezeichnen wir mit ϱ die Entfernung und Richtung

von (xyz) nach dem Fufspunkte des von $(\xi\eta\zeta)$ auf die Ebene gefällten Lotes,

mit do die Projektion von $d\omega$ auf dieselbe Ebene, so ist jedes:

$$-H \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega = -H(xyz) \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} do + \frac{\Psi}{r} d\omega,$$

wo Ψ eine endliche Funktion von ξ, η, ζ, x, y, z ist, somit

$$\int\limits_{\omega_2} (-H) \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega = -H(xyz) \int\limits_{(R)} \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} do + \int\limits_{\omega_2} \frac{\Psi}{r} d\omega = \int\limits_{\omega_2} \frac{\Psi}{r} d\omega,$$

da:

$$\int\limits_{(R)} \frac{\cos(\varrho x)}{\varrho^2} do = 0. \text{ [15]}$$

Es wird somit nach der ersten Formel 100) thatsächlich die Relation 108) stattfinden.

Damit ist bewiesen, dass wir auch $\frac{\partial V}{\partial x}$, analog $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ für Punkte (xyz) der Fläche ω, die nicht auf der Randkurve oder einer Trennungskurve von Flächenteilen liegen, auf denen

$$H, \cos(\nu x), \cos(\nu y), \cos(\nu z)$$

eindeutig und stetig sind, als uneigentliche Integrale definieren können, bei Voraussetzung endlicher erster Ableitungen von *H.**)

§ 2.

Wir können jetzt die im Anfang des § 1 erwähnten Lücken in den Sätzen III—VI in folgender Weise ausfüllen.**)

Zusatz zu III. Das Flächenintegral:

$$\overline{W} = \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

hat, falls die Fläche ω geschlossen ist, für Punkte (xyz) der Fläche ω selbst, den Wert:

$$109) \quad \overline{W} = 2\pi = \frac{1}{2}(W_+ + W_-),$$

bei Ausschluss von Punkten (xyz), die auf Trennungskurven ([16]) stetig gekrümmter Teile von ω liegen.

Denn denken wir uns um (xyz) als Centrum die Kugel mit dem Radius 1 und den Kegel von (xyz) an die kleine (xyz) umschließende Kurve ς, so wird das von dem Kegel aus der Kugel ausgeschnittene Flächenstück sich um so mehr der halben Kugelfläche, also dem Werte 2π nähern, je kleiner wir ς machen.

Zusatz zu IVa). Die Formel:

$$110) \quad \text{abs.} \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \overline{\overline{<}} A \text{ abs. Max.} (\varkappa),$$

in welcher A eine endliche positive Zahl vorstellt, gilt auch für beliebige Punkte der Fläche ω selbst.

---

*) Für die normale Ableitung von V ist diese Bedingung nicht erforderlich (S. 75).

**) Wir bitten, in dem Folgenden auf die Beweise der betreffenden Sätze, deren Zusätze wir aussprechen, zurückzugehen.

Zusatz zu IV b). Das Flächenintegral:

$$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

ist, bei Ausschluss der Randkurve σ und der Trennungskurven [16] von Flächenteilen, auf denen

$$\varkappa,\ \cos(\nu x),\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

stetig sind, auf der Fläche ω überall eindeutig und stetig. Sein Wert für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche, welcher nicht auf der Kurve (den Kurven) σ liegt, ist mit den Werten W_+ und W_-, die W annimmt, wenn der Punkt (xyz) an den Punkt $(\xi\eta\zeta)$ von der positiven oder negativen Seite der Fläche unendlich nahe herantritt, durch die Relationen verbunden:

$$111)\quad \begin{cases} W(\xi\eta\zeta) = W_+ - 2\pi\varkappa, \\ \qquad\qquad\ = W_- + 2\pi\varkappa, \\ \qquad\qquad\ = \frac{1}{2}(W_+ + W_-). \end{cases}$$

Zusatz zu V a). Die Eindeutigkeit und Stetigkeit des Flächenpotentials:

$$V = \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

gilt einschliefslich der Fläche ω selbst; es ist für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche:

$$112)\quad \begin{cases} V(\xi\eta\zeta) = V_+, \\ \qquad\qquad\ = V_-, \\ \qquad\qquad\ = \frac{1}{2}(V_+ + V_-), \end{cases}$$

wenn wir resp. mit V_+ und V_- die Werte von V bezeichnen, wenn (xyz) an den Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche von der positiven oder negativen Seite unendlich nahe herantritt.

Zusatz zu V b). Die ersten Ableitungen des Flächenpotentials:

$$V = \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

sind, falls man sich von der Randkurve σ und den Trennungskurven von Flächenteilen, auf denen

$$H,\ \cos(\nu x,)\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

stetig sind, in endlicher Entfernung hält, auf der Fläche ω überall eindeutig und stetig, wenn die ersten Ableitungen von H überall endlich sind. Ihre Werte in einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche, welcher nicht auf der Kurve (den Kurven) σ liegt, ist mit den Werten:

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_+, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_+, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_+,$$
$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_-, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_-, \quad \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_-,$$

welche

$$\frac{\partial V}{\partial x}, \quad \frac{\partial V}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial z}$$

annehmen, wenn man (xyz) dem Punkt $(\xi\eta\zeta)$ von der positiven oder negativen Seite der Fläche unendlich nähert, durch die Relationen verbunden:

$$113\text{a)}\quad \begin{cases} \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(\xi\eta\zeta)} = \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_+ + 2\pi H\cos(\nu x), \\ \qquad\qquad = \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_- - 2\pi H\cos(\nu x), \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_+ + \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_-\right); \\ \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_{(\xi\eta\zeta)} = \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_+ + 2\pi H\cos(\nu y), \\ \qquad\qquad = \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_- - 2\pi H\cos(\nu y), \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_+ + \left|\frac{\partial V}{\partial y}\right|_-\right); \\ \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_{(\xi\eta\zeta)} = \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_+ + 2\pi H\cos(\nu z), \\ \qquad\qquad = \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_- - 2\pi H\cos(\nu z), \\ \qquad\qquad = \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_+ + \left|\frac{\partial V}{\partial z}\right|_-\right). \end{cases}$$

Für die Eindeutigkeit und Stetigkeit der normalen Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ und die Gültigkeit der Formel:

$$113b) \quad \left\{ \begin{aligned} \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{(\xi\eta\zeta)} &= \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{+} + 2\pi H, \\ &= \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{-} - 2\pi H, \\ &= \frac{1}{2}\left(\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{+} + \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{-}\right) \end{aligned} \right.$$

sind irgend welche Voraussetzungen über die Ableitungen von H nicht erforderlich.

Bei Übertragung des Beweises von Vb) auf den vorliegenden Fall ist zu bedenken, dass die frühere Formel:*)

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \int_{\sigma} H \frac{\cos(\nu y)\cos(\sigma z) - \cos(\nu z)\cos(\sigma y)}{r} d\sigma$$

$$+ \int_{\omega} \frac{\frac{\partial H}{\partial \xi} - H\cos(\nu x)(f_{11} + f_{22} + f_{33})}{r} d\omega$$

$$- \int_{\omega} \frac{H\cos(\nu x)\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

für den Wert in einem Punkte der Fläche so aufzustellen ist, dass man den Punkt durch eine kleine Kurve ς abtrennt und somit das erste Integral über diese kleine Kurve miterstreckt, die Flächenintegrale über die übrig bleibende Fläche ausdehnt, schliefslich die Kurve ς unendlich verkleinert. ([17])

In der normalen Ableitung von V in einem Punkte $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ der Fläche:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_0} = -\int_{\omega} H \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega$$

kann in einem endlichen Gebiete um $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$

$$\cos(r\nu_0) = \cos(r\nu) + r\varphi$$

gesetzt werden, wo φ stets endlich ist. ([18])

Es folgt so Zusatz zu Vb) aus Zusatz zu IVb) und Zusatz zu Va).

---

*) Vgl. S. 42.

Wenn wir versuchen, auch über Werte der ersten und zweiten Ableitungen des Flächenintegrales W und der zweiten Ableitungen des Flächenpotentiales auf ω selbst etwas auszusagen, also die den Sätzen IVc), Vc), IVd) entsprechenden Zusätze abzuleiten, so zeigt es sich naturgemäſs, dass nicht alle dieser Ableitungen auf der Fläche einen Sinn haben: für irgend welche Ableitungen von W, $\frac{\partial V}{\partial x}$, $\frac{\partial V}{\partial y}$, $\frac{\partial V}{\partial z}$ kann man einigermaſsen entsprechende Zusätze nur in den Fällen beweisen, in denen sie unmittelbare Folgerungen von den obigen Zusätzen sind.

§ 3.

Es bleibt uns nur noch übrig, auch für das Raumpotential resp. seine Ableitungen die gleiche Lücke auszufüllen. Das Raumpotential:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r}$$

selbst, wie seine ersten Ableitungen sind im ganzen Raume eindeutig und stetig, und wir brauchten die Oberfläche ω des Gebietes τ selbst hierbei nicht auszunehmen (Satz VIa) und VIb)). Dagegen schlossen wir bei den Sätzen VIc) und VId) über die zweiten Ableitungen des Raumpotentials die Oberfläche ω und die Trennungsflächen von Räumen, in denen E eindeutig und stetig ist, aus. Wir können nun die folgenden Sätze beweisen:

Zusatz zu VIc). Die zweiten Ableitungen des Raumpotentials:

$$V = \int_\tau E \frac{d\tau}{r}$$

sind, falls man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven stetig gekrümmter Teile der Oberfläche ω und der Flächen hält, die das Gebiet τ in Teile zerlegen, in denen E stetig ist, auf der Oberfläche (den Flächen) ω überall eindeutig und stetig, wenn die ersten Ableitungen von E überall endlich sind. Ihre Werte in einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche (der Flächen) ω, welche nicht auf den ausgeschlossenen Kurven liegen, sind mit den Randwerten derselben zweiten Ableitungen durch die folgenden Relationen verbunden:

$$
114)\quad \begin{cases}
\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{(\xi\eta\zeta)} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{+} + 2\pi E \cos^2(\nu x), \\
\qquad\text{resp.} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{+} + 2\pi (E_{+} - E_{-}) \cos^2(\nu x), \\
\qquad = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{-} - 2\pi E \cos^2(\nu x), \\
\qquad\text{resp.} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{-} - 2\pi (E_{+} - E_{-}) \cos^2(\nu x), \\
\qquad = \dfrac{1}{2}\left\{ \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{+} + \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{-} \right\},
\end{cases}
$$

analog $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right|_{(\xi\eta\zeta)}$ und $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right|_{(\xi\eta\zeta)}$,

$$
115)\quad \begin{cases}
\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{(\xi\eta\zeta)} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{+} + 2\pi E \cos(\nu y)\cos(\nu z), \\
\qquad\text{resp.} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{+} + 2\pi (E_{+} - E_{-}) \cos(\nu y)\cos(\nu z) \\
\qquad = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{-} - 2\pi E \cos(\nu y)\cos(\nu z), \\
\qquad\text{resp.} = \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{-} - 2\pi (E_{+} - E_{-}) \cos(\nu y)\cos(\nu z), \\
\qquad = \dfrac{1}{2}\left\{ \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{+} + \left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial y\,\partial z}\right|_{-} \right\},
\end{cases}
$$

analog $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial z\,\partial x}\right|_{(\xi\eta\zeta)}$ und $\left.\dfrac{\partial^2 V}{\partial x\,\partial y}\right|_{(\xi\eta\zeta)}$,

wobei wir für die Oberfläche ω die innere Seite als die positive voraussetzen.

Bei Übertragung des Beweises von VIc) auf den vorliegenden Fall ist zu bedenken, dass die frühere Formel:*)

$$
\frac{\partial V}{\partial x} = \int\limits_{\omega} \frac{E\cos(\nu x)}{r}\, d\omega + \int\limits_{\tau} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r}
$$

für den Wert in einem Punkte der Fläche (der Flächen) ω so aufzustellen ist, dass man den Punkt durch eine

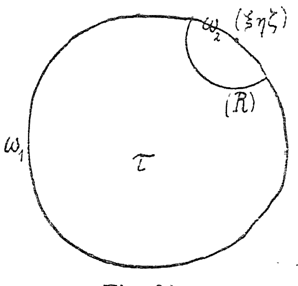


Fig. 34.

*) S. 62.

kleine Kurve ς auf der Fläche (den Flächen) ω isoliert und das erste Integral rechts über die übrigbleibende Fläche ω_1 erstreckt, schliefslich die Kurve ς unendlich verkleinert. Es ist daher:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \lim_{\omega - \omega_1 = 0} \int_{\omega_1} \frac{E \cos(\nu x)}{r} d\omega + \int_{\tau} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{d\tau}{r},$$

für das zu zweit stehende Raumintegral ist nach Satz VIa) und VIb) die gleiche Vorsicht nicht erforderlich. Es wird ferner:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}_{(\xi \eta \zeta)} = - \lim_{\omega - \omega_1 = 0} \int_{\omega_1} \frac{E \cos(\nu x) \cos(rx)}{r^2} d\omega - \int_{\tau} \frac{\partial E}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} d\tau,$$

oder mit Hilfe des Zusatzes zu Vb):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}_{(\xi \eta \zeta)} = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}_{+} + 2\pi E \cos^2(\nu x),$$

$$\text{resp.} = \left|\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}\right|_{+} + 2\pi (E_{+} - E_{-}) \cos^2(\nu x),$$

und analog ergeben sich die übrigen Formeln unserer Behauptung 114) zu gleicher Zeit mit den in Zusatz zu VIc) behaupteten Stetigkeitseigenschaften.

Zusatz zu VId). Der Laplacesche Differentialausdruck

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

für das Raumpotential:

$$V = \int_{\tau} E \frac{d\tau}{r}$$

hat für Punkte auf der Oberfläche ω des Gebietes τ und auf Flächen, welche das Gebiet τ in Teile zerlegen, in denen E eindeutig und stetig ist, falls man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven stetig gekrümmter Teile dieser Flächen hält, die Werte:

$$116) \quad \Delta V = -2\pi E, \quad \text{resp.} = -2\pi (E_{+} + E_{-}),$$

wenn die ersten Ableitungen von E überall endlich sind.

Dieser Zusatz zu VId) folgt aus dem Zusatz zu VIc) genau in derselben Weise wie der Satz VId) selbst aus dem Satze VIc).

2. Kapitel.

Über das Verhalten des Flächenintegrales W bei Annäherung an die Randkurve der Fläche.

§ 1.

Wir wollen hier zuerst untersuchen, was aus dem Flächenintegral:

$$117)\quad \overline{W} = \int_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

wird, wenn man den variablen Punkt (xyz) immer näher an die Randkurve von ω heranrücken lässt, die wir zunächst als stetig gekrümmt annehmen. Wir lösen hierzu zunächst die folgende Aufgabe: Es sei $(\xi\eta\zeta)$ irgend ein Punkt der x Axe, (xyz) ein Punkt der yz Ebene, wir suchen die Integrale:

$$118)\quad \begin{cases} A = +\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(rx)}{r^2}\, d\xi, \\ B = +\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(ry)}{r^2}\, d\xi, \\ \Gamma = +\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(rz)}{r^2}\, d\xi \end{cases}$$

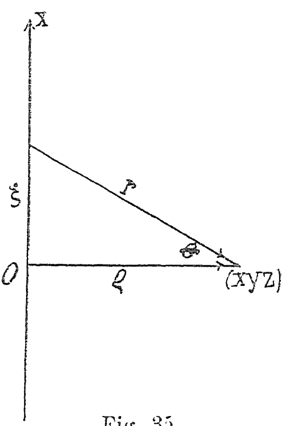


Fig. 35.

für irgend einen Punkt (xyz) der yz Ebene, der von der x Axe durch irgend welche Entfernungen getrennt sein möge, zu berechnen. Wir bezeichnen die Projektion der Strecke und Richtung r auf die yz Ebene mit ϱ, den Winkel der Richtung ϱ mit der y Axe mit φ, dann ist:

$$r^2 = \varrho^2 + \xi^2 = \frac{\varrho^2}{\cos^2\theta},$$

$$\cos(rx) = -\frac{\xi}{\sqrt{\varrho^2+\xi^2}} = -\sin\theta,$$

$$\cos(ry) = \frac{\varrho\cos\varphi}{\sqrt{\varrho^2+\xi^2}} = \cos\theta\cos\varphi,$$

$$\cos(rz) = \frac{\varrho\sin\varphi}{\sqrt{\varrho^2+\xi^2}} = \cos\theta\sin\varphi,$$

$$d\xi = d(\varrho\,\mathrm{tang}\,\theta) = \frac{\varrho\, d\theta}{\cos^2\theta},$$

wenn wir noch mit ϑ den Winkel der beiden Richtungen r und ϱ bezeichnen.*) Es wird somit:

$$
119)\quad \begin{cases}
A = -\dfrac{1}{\varrho}\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \sin\vartheta\, d\vartheta = 0, \\[2ex]
B = \dfrac{1}{\varrho}\cos\varphi \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta = 2\,\dfrac{\cos\varphi}{\varrho}, \\[2ex]
\Gamma = \dfrac{1}{\varrho}\sin\varphi \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}} \cos\vartheta\, d\vartheta = 2\,\dfrac{\sin\varphi}{\varrho}.
\end{cases}
$$

Wären die Integrale nicht von $\xi = -\infty$ bis $\xi = +\infty$, sondern von

$$\xi = -S \text{ bis } \xi = +S$$

zu erstrecken, wo S eine gegen ϱ sehr große Länge vorstellt, so würden sie sich von den Integralen 119) um Größen von der Form unterscheiden:

$$0,$$

$$\text{resp. } \frac{\cos\varphi}{\varrho}\varepsilon^2,$$

$$\text{„} \quad \frac{\sin\varphi}{\varrho}\varepsilon^2,$$

wo ε eine von der Ordnung $\dfrac{\varrho}{S}$ kleine Zahl vorstellt.

---

*) Derselbe ist positiv zu rechnen im Intervall:

$$0 \overline{\overline{<}}\, \xi \,\overline{\overline{<}}\, \infty \left(0 \overline{\overline{<}}\, \vartheta \,\overline{\overline{<}}\, \frac{\pi}{2}\right),$$

negativ im Intervall:

$$-\infty \overline{\overline{<}}\, \xi \,\overline{\overline{<}}\, 0 \left(-\frac{\pi}{2} \overline{\overline{<}}\, \vartheta \,\overline{\overline{<}}\, 0\right).$$

Nach dieser Vorbereitung treten wir unserer eigentlichen Aufgabe näher. Wir denken uns in einem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ der Randkurve eines Flächenstückes ω die Normalebene, nehmen dieselbe zur yz Ebene und die Tangente der Kurve in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zur x Axe. Wir untersuchen das Flächenintegral:

$$\overline{W} = \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

in der soeben festgesezten yz Ebene und zwar in der Absicht, den variabeln Punkt immer näher an den Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$*) heranrücken zu lassen.

Die yz Ebene schneidet die Fläche in einer Kurve ς, deren (nach der Innenseite der Fläche) gerichtete Tangente wir als y Axe festsetzen, während die positive z Axe nach der konvexen Seite der Kurve ς gehen möge.**) Der Radiusvektor ϱ des variabeln Punktes X möge mit dieser y Axe den Winkel φ einschliefsen und der mit dem Radius ϱ um den Anfangspunkt geschlagene Kreis die y Axe in B, die Kurve ς in A treffen. Wir fragen nach dem Werte der Differenz:

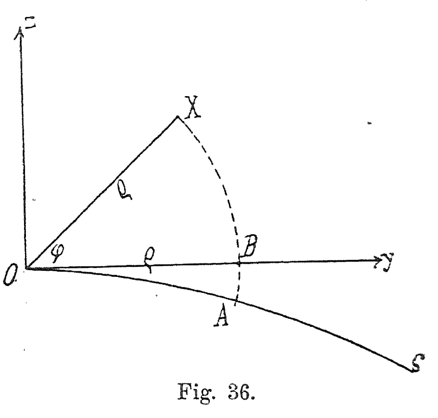


Fig. 36.

$$120)\quad \overline{W}_X - \overline{W}_A \equiv (\overline{W}_X - \overline{W}_B) + (\overline{W}_B - \overline{W}_A),$$

und wir wollen zunächst den ersten Summanden rechts:

$$\overline{W}_X - \overline{W}_B$$

berechnen. Es ist:

---

*) D. i. an den Anfangspunkt des neuen Koordinatensystems.

**) Die positive Seite der Fläche ω sei in entsprechender Weise angenommen.

$$\overline{W}_X - \overline{W}_B = \int_0^{\varphi} \frac{\partial \overline{W}}{\partial \varphi} \cdot d\varphi \, (^{19}),$$

$$= \int_0^{\varphi} \left[\frac{\partial \overline{W}}{\partial y} (-\varrho \sin \varphi) + \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} (\varrho \cos \varphi) \right] d\varphi,$$

oder da nach Formel 59):

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial y} = \int_{\sigma} \frac{\cos(rz)\cos(\sigma x) - \cos(rx)\cos(\sigma z)}{r^2} d\sigma,$$

$$\frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = \int_{\sigma} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma y) - \cos(ry)\cos(\sigma x)}{r^2} d\sigma,$$

auch:

$$121) \quad \overline{W}_X - \overline{W}_B = \varrho \int_0^{\varphi} \int_{\sigma} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma\varrho) - \cos(\sigma x)\cos(r\varrho)}{r^2} d\sigma \, d\varphi.$$

Wir teilen nun das Integral über die Kurve σ in zwei Teile, der eine gehe von:

$$\sigma = -s \text{ bis } \sigma = +s,$$

wobei wir den Anfangspunkt als Nullpunkt ansehen, und zwar wählen wir s als eine e n d l i c h e Bogenlänge von der Beschaffenheit, dass in dem Intervall

$$\sigma = -s \text{ bis } \sigma = +s:$$

$$122) \quad \begin{cases} \xi = \sigma + \frac{1}{2}\sigma^2 \left| \frac{d^2\xi}{d\sigma^2} \right|_a, \\ \eta = \frac{1}{2}\sigma^2 \left| \frac{d^2\eta}{d\sigma^2} \right|_a, \\ \zeta = \frac{1}{2}\sigma^2 \left| \frac{d^2\zeta}{d\sigma^2} \right|_a, \end{cases}$$

wo a ein Punkt des Kurvenstückes ($-s \longrightarrow +s$) ist, und die Funktion:

$$\text{abs.} \frac{\xi\cos(\sigma x) + \eta\cos(\sigma y) + \zeta\cos(\sigma z)}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2}} \; (\text{d. i. abs.} \left|\cos(r\sigma)\right|_{\rho=0})$$

auf der Strecke von $\sigma = \lim_{\varepsilon = 0} \varepsilon$ bis $\sigma = + s$

und auf der Strecke von $\sigma = \lim_{\varepsilon = 0} (-\varepsilon)$ bis $\sigma = - s$

von dem Werte 1 fortdauernd bis zu einem positiven von null verschiedenen Werte θ abnimmt.

Bezeichnen wir mit r_s die kleinste der Entfernungen von (irgend einem Punkte des Kreises ABX (Fig. 36)) X nach + s und X nach (— s), so ist jedenfalls der von dem zweiten Teil der Kurve σ herrührende Teil J_2 des Ausdrucks $\overline{W}_X - \overline{W}_B$ seinem absoluten Werte nach:

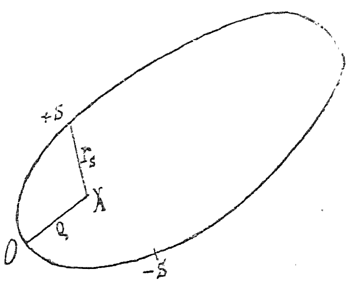


Fig. 37.

$$123) \quad \text{abs. } J_2 \overline{\gtrless} \varrho \cdot \frac{\varphi \cdot (l - 2s)}{r_s^2},$$

wenn l die Länge der ganzen Kurve σ vorstellt.

Wir teilen weiter das Integral über den Teil von

$$\sigma = - s \text{ bis } \sigma = + s$$

der Kurve σ abermals in zwei Teile, von denen der eine von:

$$\sigma = - S \text{ bis } \sigma = + S$$

gehe, und zwar sei bei genügend kleinem ϱ die Bogenlänge S so gewählt, dass $\cos(r\sigma)$ von:

$$\sigma = + S \text{ bis } \sigma = + s \text{ negativ,}$$

von

$$\sigma = - s \text{ bis } \sigma = - S \text{ positiv,}$$

und dass

$$\text{abs. } \cos(r\sigma)$$

gröfser sei als ein echter Bruch Θ. Wir können dies für ein jedes unter einem beliebigen Kleinheitsgrade liegende S erreichen, wenn wir nur $\frac{\varrho}{S}$ genügend klein wählen.

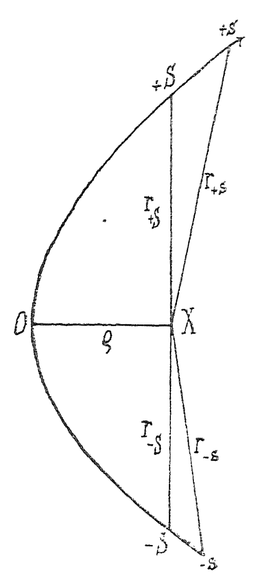


Fig. 38.

Es ist nämlich für genügend kleine $\frac{\varrho}{S}$:

$$\cos(r\sigma) = \left|\cos(r\sigma)\right|_{\rho=0} + \varrho \left|\frac{\cos(\sigma\varrho) - \cos(r\varrho)\cos(r\sigma)}{r}\right|_{Y}$$

wenn Y einen auf der Strecke OX liegenden Punkt vorstellt. Nun ist der erste Summand hierin seinem absoluten Werte nach $> \theta$, der zweite lässt sich durch Verkleinerung von $\frac{\varrho}{S}$ unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken, es ist somit bei genügend kleinem $\frac{\varrho}{S}$

abs. $\cos(r\sigma)$ in den Intervallen
$\sigma = +S$ bis $\sigma = +s$,
$\sigma = -s$ bis $\sigma = -S$

ein echter Bruch.

Der den letztgenannten Intervallen entsprechende Teil J_3 des Ausdruckes $\overline{W}_X - \overline{W}_B$ ist nun:

$$J_3 = \varrho \int_0^{\varphi} \left[\int_{-s}^{-S} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma\varrho) - \cos(\sigma x)\cos(r\varrho)}{r^2}\, d\sigma \right.$$

$$\left. + \int_{+S}^{+s} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma\varrho) - \cos(\sigma x)\cos(r\varrho)}{r^2}\, d\sigma \right] d\varphi,$$

$$\text{abs. } J_3 \leqq \varrho \int_0^{\varphi} \left[\int_{-s}^{-S} \frac{d\sigma}{r^2} + \int_{+S}^{+s} \frac{d\sigma}{r^2} \right] d\varphi,$$

$$\leqq \frac{\varrho}{\Theta} \int_0^{\varphi} \left[\int_{-s}^{-S} \frac{+\cos(r\sigma)}{r^2}\, d\sigma + \int_{+S}^{+s} \frac{(-\cos(r\sigma))}{r^2}\, d\sigma \right] d\varphi,$$

$$124)\quad \text{abs. } J_3 \leqq \frac{\varrho}{\Theta} \cdot \varphi \cdot \left[\left(\frac{1}{r_{-S}} - \frac{1}{r_{-s}} \right) - \left(\frac{1}{r_{+s}} - \frac{1}{r_{+S}} \right) \right],$$

wenn wir mit r_{-S} r_{+s} die gröfsten, mit r_{-s} r_{+S} die kleinsten Werte der Entfernungen der Punkte

$-S, +s$ resp. $-s, +S$ (Fig. 38)

von einem Punkte des Kreises ABX (Fig. 36) bezeichnen. Es ist also:

$$125)\quad \overline{W}_X - \overline{W}_B = \varrho \int_0^{\varphi} \int_{-S}^{+S} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma\varrho) - \cos(\sigma x)\cos(r\varrho)}{r^2}\, d\sigma\, d\varphi + J_2 + J_3,$$

wo J_2 und J_3 den Ungleichungen 123), 124) genügen und S unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, sobald nur $\frac{\varrho}{S}$ gleichfalls genügend verkleinert wird.

Es handelt sich nun noch darum, den ersten Teil des Ausdruckes $\overline{W}_X - \overline{W}_B$:

$$126)\quad J_1 = \varrho \int_0^{\varphi} \int_{-S}^{+S} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma\varrho) - \cos(\sigma x)\cos(r\varrho)}{r^2}\, d\sigma d\varphi$$

zu untersuchen. Wir denken uns hierzu entsprechend jedem Punkte σ des Kurvenstückes $(-S)$ bis $(+S)$ einen Punkt:

$$\xi' = \sigma$$

auf der x Axe und bezeichnen mit r′ die Entfernung und Richtung von diesem Punkte nach dem variabeln Punkte X, es ist dann:

$$r'^2 = \sigma^2 + \varrho^2$$

und nach 122):

$$r^2 = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{2}\sigma \left|\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right|_a\right)^2 + \left(\varrho\cos\varphi - \frac{1}{2}\sigma^2 \left|\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right|_a\right)^2 + \left(\varrho\sin\varphi - \frac{1}{2}\sigma^2 \left|\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right|_a\right)^2,$$

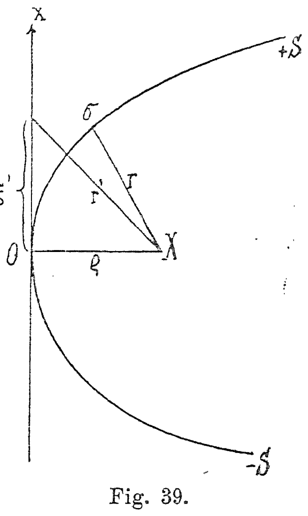


Fig. 39.

somit:

$$r^2 = r'^2 - \varrho\sigma^2 \left\{\cos\varphi \left|\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right|_a + \sin\varphi \left|\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right|_a\right\} + \sigma^4 \psi(\xi\eta\zeta), ^{*})$$

---

*) Es ist zu bedenken, dass wegen

$$\cos(\sigma x)\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} + \cos(\sigma y)\frac{d^2\eta}{d\sigma^2} + \cos(\sigma z)\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = 0,$$

in unserem Falle auch jedes:

$$\frac{d^2\xi}{d\sigma^2} = -\sigma \left\{\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\left|\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right|_a + \frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\left|\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right|_a + \frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\left|\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right|_a\right\}.$$

wo ψ eine (stets endliche) bloſse Funktion von ξ, η, ζ ist, und, da

$$r' > \varrho,$$

$$127) \quad r = r'\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varrho}\chi(\xi\eta\zeta)\right),$$

bei genügend kleinem $\frac{\sigma^2}{\varrho}$,*) wobei χ eine (stets endliche) bloſse Funktion von ξ, η, ζ ist. Analog, wie für r, ergeben sich für cos(rx), cos(ry), cos(rz) Formeln von der Form:

$$128) \quad \begin{cases} \cos(rx) = \cos(r'x)\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varrho}\chi_1(\xi\eta\zeta)\right), \\ \cos(ry) = \cos(r'y)\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varrho}\chi_2(\xi\eta\zeta)\right), \\ \cos(rz) = \cos(r'z)\left(1 + \frac{\sigma^2}{\varrho}\chi_3(\xi\eta\zeta)\right), \end{cases}$$

bei genügend kleinem $\frac{\sigma^2}{\varrho}$,*) wobei $\chi_1\,\chi_2\,\chi_3$ (stets endliche) bloſse Funktionen ven ξ, η, ζ sind. Nach 127), 128) können wir somit J_1 so schreiben:

$$J_1 = \varrho \int_0^{\varphi}\int_{-S}^{+S} \frac{\cos(r'x)\cos(\sigma\varrho) - \cos(r'\varrho)\cos(\sigma x)}{r'^2}\, d\sigma\, d\varphi$$

$$+ \varrho \int_0^{\varphi}\int_{-S}^{+S} \frac{\sigma^2}{\varrho}\varphi(\xi\eta\zeta)\frac{\cos(r'x)\cos(\sigma\varrho) - \cos(r'\varrho)\cos(\sigma x)}{r'^2}\, d\sigma\, d\varphi,$$

bei genügend kleinem $\frac{\sigma^2}{\varrho}$,*) wobei φ eine (stets endliche) bloſse Funktion von $(\xi\eta\zeta)$ ist. Es ist weiter:

$$\cos(\sigma\varrho) = \sigma\left\{\cos\varphi\left|\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right|_a + \sin\varphi\left|\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right|_a\right\},$$

$$\cos(\sigma x) = 1 + \sigma\left|\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right|_a,$$

*) D. i. bei Vernachlässigung höherer Potenzen von $\frac{\sigma^2}{\varrho}$.

wir können daher das erste Integral noch einmal zerlegen und J_1 so darstellen:

$$129)\quad J_1 = -\varrho \int_0^{\varphi} \int_{-S}^{+S} \frac{\cos(r'\varrho)}{r'^2} d\xi' d\varphi + J_4,$$

wo:

$$130)\quad J_4 = \int_0^{\varphi} \int_{-S}^{+S} [\varrho\sigma\Phi(\xi\eta\zeta) + \sigma^2\varphi(\xi\eta\zeta)] \frac{\cos(r'x)\cos(\sigma\varrho) - \cos(r'\varrho)\cos(\sigma x)}{r'^2} d\sigma d\varphi$$

und Φ und φ (stets endliche) bloſse Funktionen von $(\xi\eta\zeta)$ vorstellen. Der erste Teil von J_1 ist nach 119) und der diesen Formeln nachfolgenden Bemerkung

$$= -2\varphi + \varepsilon^2 \cdot \varphi,$$

wo ε eine von der Ordnung $\frac{\varrho}{S}$ kleine Zahl vorstellt. Andererseits ist, da $r' \geqq \varrho$ ist:

$$\text{abs. } J_4 \leqq \int_0^{\varphi} \int_{-S}^{+S} \left(\frac{\sigma}{\varrho} \Phi(\xi\eta\zeta) + \frac{\sigma^2}{\varrho^2} \varphi(\xi\eta\zeta)\right) d\sigma d\varphi,$$

also:

$$131)\quad \text{abs. } J_4 \leqq A\frac{S^2}{\varrho} + B\frac{S^3}{\varrho^2},$$

wo A und B zwei endliche Zahlen vorstellen; fassen wir das bisherige Resultat einigermaſsen zusammen, so können wir sagen, es ist:

$$132)\quad \overline{W}_X - \overline{W}_B = -2\varphi + \varepsilon^2\varphi + J_2 + J_3 + J_4,$$

wo ε eine von der Ordnung $\frac{\varrho}{S}$ kleine Zahl vorstellt und J_2 J_3 J_4 den Ungleichungen 123), 124), 131) genügen.

Aus 132) folgt, wenn wir den Winkel der Richtungen OA und OB (Fig. 36) mit $\Delta\varphi$ bezeichnen:

$$133)\quad \overline{W}_B - \overline{W}_A = -2\Delta\varphi + \varepsilon^2\Delta\varphi + \Delta J_2 + \Delta J_3 + \Delta J_4,$$

wo ΔJ_2 ΔJ_3 ΔJ_4 gleichfalls den Ungleichungen 123), 124), 131) genüge leisten.*) Es wird so:

$$134)\ \overline{W}_X - \overline{W}_A = -2\varphi + \varepsilon^2\varphi - (2-\varepsilon^2)\,\Delta\varphi + J_2 + \Delta J_2 + J_3 + \Delta J_3 + J_4 + \Delta J_4,$$

oder:

$$135)\ \overline{W}_X - \overline{W}_A = -2\varphi + D,$$

wo wir D unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken können, wenn wir die Gröfsen:

$$\frac{\varrho}{S},\ \frac{S^2}{\varrho},\ \frac{S^3}{\varrho^2}$$

(was stets gleichzeitig möglich ist)**) genügend verkleinern. Wir haben das folgende Resultat erlangt:

VIIa) Denkt man sich in einem Punkte O der als stetig gekrümmt vorausgesetzten Randkurve σ eines Flächenstückes ω die Normalebene, in derselben um O als Centrum einen Kreis mit dem Radius ϱ; bezeichnet man ferner mit φ den Winkel, welchen die Richtung von O nach einem Punkte X dieses Kreises mit der Tangentialebene der Fläche in O bildet (positiv zu rechnen, wenn von der positiven σ Seite gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers), so ist die Differenz der Werte des Flächenintegrales:

$$\overline{W} = \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

in den Punkten X und A:

$$\overline{W}_X - \overline{W}_A = -2\varphi + D,$$

wo D durch Verkleinerung von ϱ unter jeden beliebig kleinen Wert***) herabgedrückt werden kann.

---

*) Falls $\Delta\varphi \lesseqgtr \varphi$.

**) Indem wir $\frac{S^3}{\varrho^2}$ von der Ordnung $\varrho^{1-\lambda}$ $(\lambda > 0)$ klein machen.

***) Es kann dabei D von der Ordnung $\varrho^{1-\lambda}$ klein gemacht werden $(\lambda > 0)$, vgl. Anm. 2 dieser Seite.

§ 2.

Der Beweis zu VIIa) zeigt uns, dass das Integral:

$$\varrho \int\limits_{\sigma} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma\varrho) - \cos(r\varrho)\cos(\sigma x)}{r^2}\, d\sigma,$$

oder wenn wir für den Augenblick die Richtung ϱ zur y Axe nehmen, das Integral:

$$\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = \varrho \int\limits_{\sigma} \frac{\cos(rx)\cos(\sigma y) - \cos(ry)\cos(\sigma x)}{r^2}\, d\sigma$$

sich bei genügend kleinem ϱ in der Form darstellen lässt:

$$136)\quad \varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} = -2 + \varDelta_1,$$

wo $\varDelta_1$ sich durch Verkleinerung von ϱ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken lässt. Schritt für Schritt in derselben Weise ergeben sich bei Beibehaltung desselben speciellen Koordinatensystems für die Integrale:

$$\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} = \varrho \int\limits_{\sigma} \frac{\cos(ry)\cos(\sigma z) - \cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\, d\sigma,$$

und:

$$\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} = \varrho \int\limits_{\sigma} \frac{\cos(rz)\cos(\sigma x) - \cos(rx)\cos(\sigma z)}{r^2}\, d\sigma,$$

die Formeln: Es ist bei genügend kleinem ϱ:

$$137)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial x} = \varDelta_2, \\ \varrho \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial y} = \varDelta_3, \end{cases}$$

wo $\varDelta_2 \varDelta_3$ sich durch Verkleinerung von ϱ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken lassen.

Gehen wir jetzt von unserem speciellen Koordinatensystem zu einem beliebigen über, so ergiebt sich aus 136) und 137) das Resultat:

VIIb) Für das Flächenintegral:

$$\overline{W} = \int\limits_{\omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

gelten, wenn man mit ϱ die kürzeste Entfernung und Richtung von einem Punkte O der Randkurve nach dem variabeln Punkte (xyz) bezeichnet, bei genügend kleinem ϱ die Formeln:

$$
138)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial x} = 2\left\{\cos(\varrho y)\cos(\sigma z) - \cos(\varrho z)\cos(\sigma y)\right\} + D_1, \\ \varrho \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial y} = 2\left\{\cos(\varrho z)\cos(\sigma x) - \cos(\varrho x)\cos(\sigma z)\right\} + D_2, \\ \varrho \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial z} = 2\left\{\cos(\varrho x)\cos(\sigma y) - \cos(\varrho y)\cos(\sigma x)\right\} + D_3, \end{cases}
$$

wo $D_1 D_2 D_3$ sich durch Verkleinerung von ϱ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad*) herabdrücken lassen.

Zusatz 1 zu VIIb). Ist h eine tangentielle Richtung in einem Punkte (xyz) der Fläche ω, welcher die kürzeste Entfernung ϱ von der Randkurve hat, so ist bei genügend kleinem ϱ stets für die Randwerte von $\overline{W}$ in (xyz):

$$
139)\quad \varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial h} = D,
$$

wo D sich durch Verkleinerung von ϱ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad*) herabdrücken lässt.

Zusatz 2 zu VIIb). Ist h' eine tangentielle Richtung in einem Punkte (x'y'z') einer Fläche ω', die mit ω dieselbe Randkurve hat, so ist, wenn wir mit ϱ' die kürzeste Entfernung dieses Punktes von der Randkurve bezeichnen, bei genügend kleinem ϱ' stets:

$$
140)\quad \varrho' \frac{\partial \overline{W}}{\partial h'} = D',
$$

wo D' sich durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad*) herabdrücken lässt.

Zum Beweise des ersten Zusatzes bedenke man, dass für Punkte (xyz) der Fläche ω selbst bis auf Gröfsen, die sich durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lassen:

$$
\begin{aligned}
\cos(\varrho y)\cos(\sigma z) - \cos(\varrho z)\cos(\sigma y) &= -\cos(\nu x),\\
\cos(\varrho z)\cos(\sigma x) - \cos(\varrho x)\cos(\sigma z) &= -\cos(\nu y),\\
\cos(\varrho x)\cos(\sigma y) - \cos(\varrho y)\cos(\sigma x) &= -\cos(\nu z)
\end{aligned}
$$

und mit derselben Genauigkeit also:

$$
\begin{aligned}
\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial x} &= -2\cos(\nu x),\\
\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial y} &= -2\cos(\nu y),\\
\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial z} &= -2\cos(\nu z).
\end{aligned}
$$

*) Man kann $D_1 D_2 D_3 D D'$ von der Ordnung $\varrho^{1-\lambda}$ klein machen ($\lambda > 0$), vgl. Anm. 2, S. 88.

Für den Beweis des zweiten Zusatzes braucht man nur zu erwägen, dass, falls man:

$$\overline{W'} = \int_{\omega'} \frac{\cos(r\nu')}{r^2} d\omega'$$

setzt, im ganzen Raume:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\overline{W} - \overline{W'}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(\overline{W} - \overline{W'}) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}(\overline{W} - \overline{W'}) = 0,$$

und dann den Zusatz 1 zu VIIb) in Anwendung zu bringen.

Satz VIIb) ist mit seinen Zusätzen leicht auf den Fall auszudehnen, dass die Randkurve σ Ecken (Trennungspunkte) besitzt. ([20])

§ 3.

Der Satz VIIb) lässt eine wichtige Ausdehnung auf das allgemeine Flächenintegral:

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

zu, wenn man die ersten Ableitungen von $\varkappa$ gewissen Beschränkungen unterwirft:

Wir wollen annehmen, dass die ersten Ableitungen von $\varkappa$ auf der Fläche stetig, die zweiten Ableitungen überall endlich sind, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve σ und den Trennungskurven von Flächenteilen hält, auf denen $\varkappa$ eindeutig und stetig ist. Bei genügend kleiner Entfernung von Punkten dieser Kurven sollen ferner für die ersten Ableitungen von $\varkappa$ nach irgend einer tangentialen Richtung h die Gleichungen bestehen:

$$141) \quad \varrho \frac{\partial \varkappa}{\partial h} = \varDelta,$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von jenen Kurven vorstellt und $\varDelta$ eine Gröfse, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir wollen uns zunächst auf den Fall beschränken, dass wir aufser der Randkurve σ keine Unstetigkeitskurve von W haben, die Verallgemeinerung auf den allgemeinen Fall ist ohne jede Schwierigkeit. Wir haben früher gelernt, die ersten Ableitungen von W in ein Integral über die Randkurve σ und ein Flächenintegral zu zerlegen, in dem nur r^2 im Nenner vorkommt. Es ist nach Formel 59), wenn wir die x Axe mit der Richtung h parallel machen, bei Ausschluss der Randkurve:

$$
142) \begin{cases}
\dfrac{\partial W}{\partial h} = \displaystyle\int\limits_{\sigma} \varkappa \frac{\cos(ry)\cos(\sigma z) - \cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\, d\sigma \\[2ex]
\quad - \displaystyle\int\limits_{\omega} \cos(\nu h) \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega \\[2ex]
\quad + \displaystyle\int\limits_{\omega} \frac{\partial \varkappa}{\partial h} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega.^{*)}
\end{cases}
$$

Es sei zunächst h eine beliebige Richtung und $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein Punkt der Fläche, welcher von der Randkurve durch endliche Entfernungen getrennt ist. Es ist dann offenbar, dass alle $\frac{\partial W}{\partial h}$ in diesem Punkte stetig sind, (solange man natürlich auf ein und derselben Seite der Fläche bleibt); denn man braucht nur die Fläche durch eine Kurve Σ in zwei Teile zu zerlegen, von denen der eine ω_1 durch endliche Entfernungen von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ getrennt ist, während der zweite ω_2 von der Randkurve nur endliche Entfernungen hat; die Stetigkeit des ω_1 zugehörigen Teiles von $\frac{\partial W}{\partial h}$:

$$\int\limits_{\omega_1} \varkappa \frac{\cos(\nu h) - 3\cos(rh)\cos(r\nu)}{r^3}\, d\omega$$

folgt nach I a), des ω_2 zugehörigen Teiles nach IV c). Wir wollen auch zeigen, dass die zweiten tangentialen Ableitungen von W in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ endlich sind. Wir verstehen hierzu jetzt unter h eine in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ tangentiale Richtung und teilen die Fläche wieder in zwei Teile ω_1 und ω_2, von denen der erste durch endliche Entfernungen von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ getrennt ist, während innerhalb des zweiten ω_2 $\cos(\nu h)$ sich in der Form darstellen lässt:

$$143) \quad \cos(\nu h) = r \cdot f,$$

wo f eine stets endliche Funktion der Stelle auf ω_2 ist; da wir das erste Flächenintegral in 142) in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ selbst (auch wenn wir über die Stetigkeit der ersten und die Endlichkeit der zweiten Ableitungen von $\varkappa$ nichts wüssten) als uneigentliches Integral auffassen können ([18]), können wir den von ω_2 herrührenden Teil des Randwertes von $\frac{\partial W}{\partial h}$ folgendermafsen schreiben:

---

*) Um ganz streng vorzugehen, muss man eigentlich zur Anwendung dieser Formel erst einen schmalen Randstreifen etwa von der Breite δ abscheiden; der von demselben zu $\frac{\partial W}{\partial h}$ gelieferte Beitrag ist bei genügend kleinem δ von der Ordnung $\frac{\delta}{r_\sigma}$ klein, wenn man mit r_σ die kleinste Entfernung von der Randkurve bezeichnet, und läfst sich durch Verkleinerung von δ unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken. Wir sind erst aus diesem Grunde zu dem obigen Verfahren berechtigt.

$$144)\quad \begin{cases} \left.\dfrac{\partial W}{\partial h}\right|_{\omega_2} = \displaystyle\int_{\Sigma} \varkappa \frac{\cos(ry)\cos(\Sigma z) - \cos(rz)\cos(\Sigma y)}{r^2}\, d\Sigma \\ \quad - \displaystyle\int_{\omega_2} f \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r} \right\} d\omega \\ \quad + \displaystyle\int_{\omega_2} \frac{\partial \varkappa}{\partial h} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega. \end{cases}$$

Diese Formel zeigt uns, dass für die Endlichkeit der tangentialen Ableitungen von W bei endlichen Abständen von der Randkurve nur die Endlichkeit der ersten Ableitungen von $\varkappa$ (in endlicher Entfernung von der Randkurve) von nöten wäre. Nach dieser Erkenntnis differenzieren wir die auf ω_2 angewandte Formel 142) noch einmal nach einer tangentialen Richtung h', dann wird:

$$\left.\frac{\partial^2 W}{\partial h\, \partial h'}\right|_{\omega_2} = \frac{\partial}{\partial h'} \int_{\Sigma} \varkappa \frac{\cos(ry)\cos(\Sigma z) - \cos(rz)\cos(\Sigma y)}{r^2}\, d\Sigma$$

$$- \int_{\omega_2} \cos(\nu h) \frac{\dfrac{\partial \varkappa}{\partial h'} - 3\cos(rh') \left\{ \dfrac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \cos(rx) + \dfrac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \cos(ry) + \dfrac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \cos(rz) \right\}}{r^3}\, d\omega$$

$$+ \frac{\partial}{\partial h'} \int_{\omega_2} \frac{\partial \varkappa}{\partial h} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega.$$

In endlicher Entfernung von der Randkurve ist das erste Integral rechts endlich, desgleichen das dritte nach dem kurz vorher gefundenen Resultat, sobald, wie wir ja voraussetzen, die zweiten Ableitungen von $\varkappa$ (in endlicher Entfernung von σ) endlich sind; es handelt sich nur darum, die Endlichkeit des zweiten Integrales darzuthun. Es besteht (als Folge einer Umformung mittelst des Stokes'schen Theorems)*) die Identität:

---

*) Wir haben zur Verifikation in der Formel:

$$\frac{\partial}{\partial h'} \int_{\omega_2} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial y} - \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\partial W}{\partial x} \right) \cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{\partial U}{\partial y} \right) \cos(\nu z) \right] d\omega$$

$$\equiv \frac{\partial}{\partial h'} \int_{\Sigma} \left[U \cos(\Sigma x) + V \cos(\Sigma y) + W \cos(\Sigma z) \right] d\Sigma$$

nur:

$$U = \frac{\cos(\nu h)}{r} \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \cos(rz) - \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \cos(ry) \right),$$

$$V = \frac{\cos(\nu h)}{r} \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \cos(rx) - \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \cos(rz) \right),$$

$$W = \frac{\cos(\nu h)}{r} \left(\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \cos(ry) - \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \cos(rx) \right) \text{ zu setzen.}$$

$$-\int\limits_{\omega_2} \cos(\nu h) \frac{\frac{\partial \varkappa}{\partial h'} - 3\cos(rh')\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(rx) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(ry) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(rz)\right\}}{r^3}\, d\omega$$

$$= \frac{\partial}{\partial h'}\int\limits_{\Sigma} \frac{\cos(\nu h)}{r}\Big[\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\Big(\cos(ry)\cos(\Sigma z) - \cos(rz)\cos(\Sigma y)\Big)$$

$$+ \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\Big(\cos(rz)\cos(\Sigma x) - \cos(rx)\cos(\Sigma z)\Big)$$

$$+ \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\Big(\cos(rx)\cos(\Sigma y) - \cos(ry)\cos(\Sigma x)\Big)\Big]\, d\Sigma$$

$$-\int\limits_{\omega_2} \frac{\cos(rh')}{r^2}\Big[\frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(\nu h)\Big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(\nu h)\Big)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big(\frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(\nu h)\Big)\Big]\, d\omega.$$

Das erste Integral rechts ist in endlicher Entfernung von der Randkurve endlich, in dem zweiten können wir wieder:

$$\cos(\nu h)\Big(\frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial \zeta^2}\Big) = r f'$$

setzen, wo f' eine stets endliche Funktion der Stelle auf ω_2 ist, und wir den variabeln Punkt jetzt auf der Fläche selbst annehmen.*) Das Integral ist nunmehr nach den Sätzen V a) und V b) endlich, da die zweiten Ableitungen von $\varkappa$ auf ω_2 als endlich vorausgesetzt werden; allerdings müssen wir die Voraussetzung hinzunehmen, dass die ersten Ableitungen von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ eindeutig und stetig, die zweiten endlich sind.

Wir sind so zunächst zu dem Resultate gelangt, dass bei unseren Voraussetzungen in endlicher Entfernung von der Randkurve σ alle ersten Ableitungen von W stetig und die tangentialen zweiten Ableitungen von W endlich sind.

Nach dieser Abschweifung gehen wir auf unser eigentliches Ziel los, die Ableitungen von W in der Nähe der Randkurve zu untersuchen; der Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ sei ein Punkt der Fläche in der Nähe der Randkurve, und wir bezeichnen seinen kürzesten Abstand von derselben mit ϱ_0. Wir teilen zunächst die Fläche ω in zwei Teile ω_1 und ω_2, von denen der erste durch endliche Entfernungen von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ getrennt ist, während auf dem zweiten

$$\cos(\nu h) = r \cdot f, \quad \text{(h tangentiale Richtung)}$$
$$\cos(r\nu) = r \cdot F,$$

gesetzt werden kann, wo wieder f und F endliche Funktionen der Stelle auf ω_2 vorstellen und wir den variabeln Punkt auf der Fläche selbst an-

*) Nach dem zweiten Teile der Anm. (15).

nehmen. Die Abtrennung geschehe*) aber durch eine Kurve Σ, welche nicht geschlossen ist, sondern das Gebiet ω_2 zusammen mit der Randkurve begrenzt.

Für den von ω_2 herrührenden Teil der Ableitung $\frac{\partial W}{\partial h}$ wird dann wieder die Formel 144) gelten, somit ist, wenn wir von nun an stets mit

$$\Delta(\varrho_0)$$

Glieder bezeichnen, die durch Verkleinerung von ϱ_0 unter jeden beliebig kleinen Wert herabgedrückt werden können:

Fig. 40.

$$145)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho_0 \frac{\partial W}{\partial h} &= \varrho_0 \int_\sigma \varkappa \frac{\cos(ry)\cos(\sigma z) - \cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\, d\sigma \\ &+ \varrho_0 \int_{\omega_2} \left[\frac{\partial \varkappa}{\partial h} F + f\left\{\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(rx) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(ry) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta}\cos(rz)\right\}\right]\frac{d\omega}{r} \\ &+ \Delta(\varrho_0). \end{aligned}\right.$$

Der erste Summand rechts würde sich nach einem früheren Beweise durch Verkleinerung von ϱ_0 unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lassen, wenn $\varkappa$ konstant wäre; wenn wir aber jenen Beweis noch einmal unter der Voraussetzung durchgehen, dass $\varkappa$ irgend eine stetige Funktion der Stelle auf σ ist, so kommen wir, indem wir $\varkappa$ auf der Strecke von $\sigma = -S$ bis $\sigma = +S$ (Fig. 39) in der Form darstellen:

$$\varkappa = \varkappa_0 + \Delta\varkappa,$$

(wo $\Delta\varkappa$ durch Verkleinerung von S unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann), zu demselben Resultat.[21]

Der zweite Summand ist von der Form:

$$\varrho_0 J = \varrho_0 \int_{\omega_2} \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho\, r}\, d\omega,$$

und wir wollen von demselben gleichfalls zeigen, dass er sich durch Verkleinerung von ϱ_0 unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lässt.

---

*) Was bei genügend kleinem ϱ_0 stets möglich ist.

Wir zerlegen hierzu ω_2 in folgender Weise in drei Teile: Wir denken uns mit einem gegen ϱ_0 grofsen Radius P eine Kugel um den Punkt $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ als Centrum, die die Fläche in der Kurve (P) schneiden möge, den $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ nicht enthaltenden Teil, in dem $r \geqq P$, nennen wir (3), den $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ enthaltenden Teil zerlegen wir in zwei Teile, indem wir von demselben einen Randstreifen (1) abscheiden, von solcher Beschaffenheit, dass er von $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ wenigstens überall durch die Entfernung $\frac{\varrho_0}{2}$*) getrennt ist und in dem übrig bleibenden, $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ enthaltenden Teil von ω_2, den wir (2) nennen, $\varrho \geqq \frac{\varrho_0}{2}$ ist. Es zerlegt sich dann $\varrho_0\,J$ in drei Teile

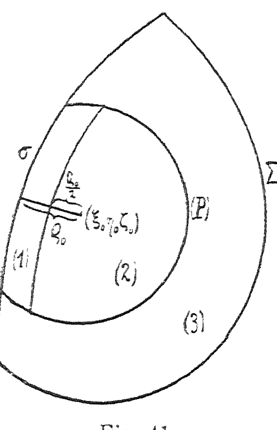


Fig. 41.

$$\varrho_0\,J = \varrho_0\,(J_1 + J_2 + J_3),$$

wo:

$$\varrho_0\,J_1 = \varrho_0 \int\limits_{(1)} \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho\,r}\,d\omega,$$

$$\varrho_0\,J_2 = \varrho_0 \int\limits_{(2)} \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho\,r}\,d\omega,$$

$$\varrho_0\,J_3 = \varrho_0 \int\limits_{(3)} \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho\,r}\,d\omega.$$

Wir werden beweisen, dass jeder dieser drei Ausdrücke durch gleichzeitige Verkleinerung von

$$\frac{\varrho_0}{P} \text{ und } P$$

unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Es ist zunächst, da für (1) jedes $r \geqq \frac{\varrho_0}{2}$:

$$\text{abs. } \varrho_0\,J_1 \leqq 2\,\text{abs.} \int\limits_{(1)} \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho} \cdot d\omega,$$

und damit ist die Behauptung zunächst für $\varrho_0\,J_1$ bewiesen. Es ist weiter, da für (2) $\varrho \geqq \frac{\varrho_0}{2}$:

*) Wir könnten ebensogut $\frac{\varrho_0}{3}$, $\frac{\varrho_0}{4}$ ..., allgemein $\frac{\varrho_0}{a}$ setzen, wenn a eine endliche Zahl ist.

$$\text{abs. } \varrho_0 J_2 \overline{\overline{<}} 2 \text{abs.} \int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(\varrho)}{r} d\omega.$$

und damit ist auch die Behauptung für $\varrho_0 J_2$ bewiesen (unter Bezugnahme auf den Satz Va) über Flächenpotentiale resp. den Beweis desselben). Schliefslich ist:

$$\text{abs. } \varrho_0 J_3 \overline{\overline{<}} \frac{\varrho_0}{\text{Min. (r)}} \text{abs.} \int\limits_{(3)} \frac{\varDelta(\varrho)}{r} d\omega \overline{\overline{<}} \frac{\varrho_0}{P} \text{abs.} \int\limits_{(3)} \frac{\varDelta(\varrho)}{r} d\omega,$$

wo Min. (r) die kleinste Entfernung eines Punktes des Teiles (3) von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ vorstellt, so dass also $\varrho_0 J_3$ durch Verkleinerung von $\frac{\varrho_0}{P}$ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Wir haben somit bewiesen, dass $\varrho_0 J$ und hierach auch

$$\varrho_0 \frac{\partial W}{\partial h}$$

durch Verkleinerung von ϱ_0 unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann und zwar von der Art $\varDelta(\varrho_0)$, da wir

$$P = \varrho_0^{\lambda'}, \quad (0 < \lambda' < 1)$$

setzen können. Wir fassen das Resultat, das leicht auf den Fall auszudehnen ist, dass die Randkurve Trennungspunkte besitzt ([22]), in folgendem Satze zusammen:

VIIc) Ist $\varkappa$ eine eindeutige und stetige Funktion*) der Stelle auf der stetig gekrümmten Fläche ω, deren erste Ableitungen eindeutig und stetig (deren zweite Ableitungen endlich) sind, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve hält,**) und lassen sich bei genügender Annäherung an die Randkurve die ersten Ableitungen von $\varkappa$ in der Form darstellen:

$$146) \quad \frac{\partial \varkappa}{\partial h} = \frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho},$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung der betreffenden Stelle von der Randkurve vorstellt und die Gröfse $\varDelta(\varrho)$ durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, so kann man über die Randwerte des Flächenpotentiales:

$$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Fläche ω folgendes aussagen:

---

*) Man vgl. die Bemerkung in Anm. ([21]).

**) Wenn wir von einer Funktion der Stelle sagen, sie sei eindeutig und stetig, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve hält, so meinen wir dabei von nun an stets, dass sie in irgend welchen (im übrigen beliebig kleinen) Entfernungen von der Randkurve eindeutig und stetig ist, bei unendlicher Annäherung indessen unendlich wachsen kann.

Es ist W eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle an der Fläche, deren erste tangentiale [und normale] Ableitungen eindeutig und stetig [deren zweite tangentiale Ableitungen endlich] sind, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve hält, und es lassen sich bei genügender Annäherung an die Randkurve die ersten tangentialen Ableitungen von W in der Form darstellen:

$$147)\quad \frac{\partial W}{\partial h} = \frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho},$$

wo wieder ϱ die kürzeste Entfernung der betreffenden Stelle von der Randkurve vorstellt und die Gröfse $\varDelta(\varrho)$ durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

§ 4.

Wir wollen bei denselben Voraussetzungen des Satzes VII c) auch das Verhalten der ersten Ableitungen von W untersuchen, wenn man den variabeln Punkt der Randkurve nicht gerade auf der Fläche ω selbst, sondern auf einer beliebigen Fläche ω', die mit ω die Randkurve σ gemeinsam hat, nähert. Es sei ϱ' die kürzeste Entfernung des Punktes $(\xi' \eta' \zeta')$, in dem diese Ableitungen zu untersuchen sind, von der Randkurve und h' eine beliebige Richtung. Es ist dann wieder nach 142), wenn wir die Richtung h' zur x Axe wählen:

$$148)\quad \left\{\begin{aligned} \varrho' \frac{\partial W}{\partial h'} = {} & \varrho' \int_\sigma \varkappa \frac{\cos(r\nu)\cos(\sigma z) - \cos(rz)\cos(\sigma\nu)}{r^2}\, d\sigma \\ & - \varrho' \int_\omega \cos(\nu h') \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega \\ & + \varrho' \int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial h'} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega; \end{aligned}\right.$$

wir wollen wieder zusehen, ob sich jeder der drei Summanden rechts durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lässt, wenn die Richtung h' in $(\xi' \eta' \zeta')$ zu ω' tangential ist.

Für den ersten Summanden rechts würde das nach Zusatz 2 zu VII a) folgen, wenn $\varkappa$ auf σ konstant wäre, es folgt aber auch für eine stetige Funktion $\varkappa$, indem man $\varkappa$ auf der Strecke von $\sigma = -S$ bis $\sigma = +S$ (Fig. 39) in der Form darstellt:

$$\varkappa = \varkappa_0 + \varDelta\varkappa,$$

(wo $\varDelta\varkappa$ durch Verkleinerung von S unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann). [21]

Der zweite Summand und der dritte Summand rechts in 148) lassen sich zusammen in der Form schreiben:

$$\varrho' \int_{\omega_2} \frac{1}{\varrho} \left\{ \varDelta_1(\varrho) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \varDelta_2(\varrho) \frac{\cos(ry)}{r^2} + \varDelta_3(\varrho) \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega + \varDelta(\varrho'),$$

indem wir ein endliches Gebiet ω_2 von ω abgeschieden haben, auf dem die ersten Ableitungen von $\varkappa$ in der Form

$$\frac{\Delta(\varrho)}{\varrho}$$

dargestellt werden können, und bemerken, dass die dem übrigen Flächenstücke ω_1 zugehörigen Teile unserer Integrale von der Form $\Delta(\varrho')$ sind. Wir haben jetzt nur noch den Ausdruck:

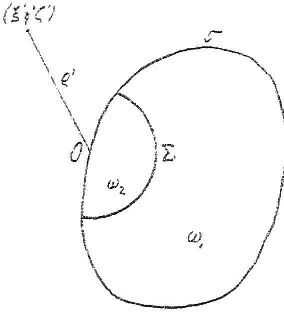


Fig. 42.

$$\varrho' J = \varrho' \int\limits_{\omega_2} \frac{1}{\varrho} \left\{ \Delta_1(\varrho) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \Delta_2(\varrho) \frac{\cos(ry)}{r^2} + \Delta_3(\varrho) \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega$$

zu untersuchen. Wir zerlegen hierzu die Fläche ω_2 nochmals in zwei Teile, indem wir einen Flächenstreifen (1) von ω_2 abscheiden, von solcher Beschaffenheit, dass für den übrig bleibenden Teil (2) ϱ gröfser ist als eine gegen ϱ' grofs gewählte Strecke P. Es zerlegt sich dann $\varrho' J$ in zwei Teile:

$$\varrho' J = \varrho' J_1 + \varrho' J_2,$$

wo:

$$\varrho' J_1 = \varrho' \int\limits_{(1)} \left\{ \Delta_1(\varrho) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \Delta_2(\varrho) \frac{\cos(ry)}{r^2} + \Delta_3(\varrho) \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} \frac{d\omega}{\varrho},$$

$$\varrho' J_2 = \varrho' \int\limits_{(2)} \left\{ \Delta_1(\varrho) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \Delta_2(\varrho) \frac{\cos(ry)}{r^2} + \Delta_3(\varrho) \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} \frac{d\omega}{\varrho}.$$

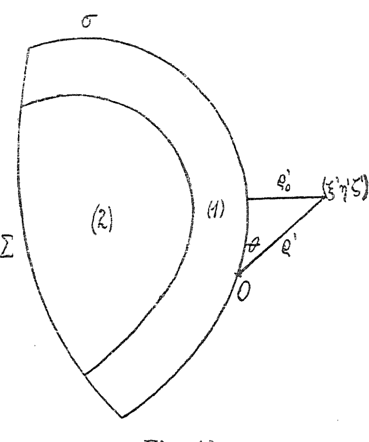


Fig. 43.

Wir wollen sehen, was aus diesen Ausdrücken wird, wenn wir

$$P \text{ und } \frac{\varrho'}{P}$$

gleichzeitig mehr und mehr abnehmen lassen.

Es ist zunächst, da für (2) $\varrho \geqq P$:

$$\text{abs. } \varrho' J_2 \leqq \frac{\varrho'}{P} \int\limits_{(2)} \frac{\Delta(\varrho)}{r^2} d\omega,$$

wo $\varDelta(\varrho)$ eine positive Gröfse vorstellt, die ebenso, wie die $\varDelta_1(\varrho)$, $\varDelta_2(\varrho)$ $\varDelta_3(\varrho)$ von der Form angenommen werden darf:*)

$$\varDelta(\varrho) = A\varrho^{1-\lambda},\ (\lambda < 1),\ (A \text{ endlich}).$$

Bezeichnen wir mit r_0 die Entfernung des Elementes $d\omega$ von dem Punkte O der Kurve σ, welcher von $(\xi'\eta'\zeta')$ den Abstand ϱ' hat, so ist bei genügend kleinem $\frac{\varrho'}{P}$

$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{r_0^2}(1 + \varepsilon)$$

wo ε eine Gröfse vorstellt, die mit abnehmendem $\frac{\varrho'}{P}$ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, so dass wir bei genügend kleinem $\frac{\varrho'}{P}$ auch:

$$\text{abs. } \varrho' J_2 \mathrel{\overline{\overline{<}}} \frac{\varrho'}{P} \int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(\varrho)^{**)}}{r_0^2}\, d\omega$$

erhalten. Wir denken uns weiter in O die Tangentialebene der Fläche und projizieren auf diese Tangentialebene die Fläche (2);

do sei die Projektion von $d\omega$,
r_0 sei die Projektion von r,

dann ist bei genügender Verkleinerung von Σ:

$$\int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(\varrho)}{r_0^2}\, d\omega = \int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(\varrho)}{r_0^2}(1 + \varrho \cdot \psi)\, do,$$

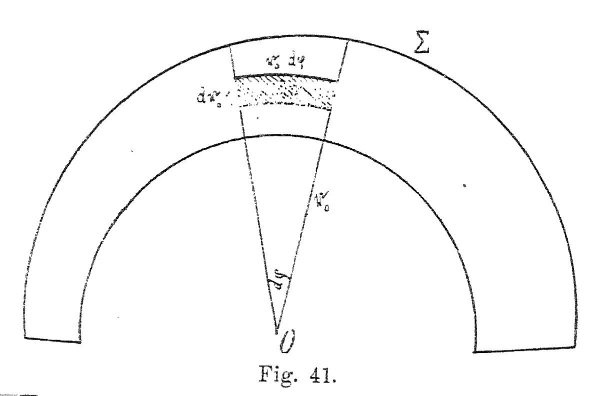


Fig. 41.

*) Man vgl. Anm. 3, S. 88.

**) Das $\varDelta(\varrho)$ ist dabei nicht genau dasselbe $\varDelta(\varrho)$ von früher, hat aber dieselbe Eigenschaft, in der Form:

$$A\varrho^{1-\lambda}\ (\lambda < 1),\ (A \text{ endlich})$$

darstellbar zu sein.

wo ψ eine stets endliche Funktion vorstellt; wir können also das $(1 + \varrho \cdot \psi)$ in $\varDelta(\varrho)$ hereinnehmen, und es folgt wieder:

$$\text{abs. } \varrho' J_2 \overline{\overline{<}} \frac{\varrho'}{P} \int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(\varrho)}{r_0^2}\, d\mathfrak{o} \overline{\overline{<}} \frac{\varrho'}{P} \int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(r_0)}{r_0^2}\, d\mathfrak{o},$$

da jedes:

$$\varrho = r_0 + \varrho \cdot \chi$$

wenn χ eine endliche Gröfse ist.

Bei Einführung eines Polarkoordinatensystems $(r_0 \varphi)$ in der Tangentialebene mit dem Pol O ist:

$$d\mathfrak{o} = r_0\, dr_0\, d\varphi,$$

somit:

$$\int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(r_0)}{r_0^2}\, d\omega = \int\limits_{(2)} \frac{\varDelta(r_0)}{r_0}\, dr_0\, d\varphi$$

und stets endlich, da das Integral:

$$\int\limits_{P}^{r} \frac{\varDelta(r_0)}{r_0}\, dr_0,$$

in dem r irgend eine endliche Länge vorstellt, bei unendlich kleinem P stets unter einer endlichen Grenze bleibt. Damit ist jetzt gezeigt, dass

$$\varrho' J_2$$

durch Verkleinerung von

$$P \text{ und } \frac{\varrho'}{P}$$

unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Es ist andererseits bei genügend kleinem P:

$$\varrho' J_1 \equiv \varrho' \int\limits_{(1)} \left\{ \varDelta_1(\varrho) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \varDelta_2(\varrho) \frac{\cos(ry)}{r^2} + \varDelta_3(\varrho) \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} \frac{d\omega}{\varrho},$$

$$= \varrho' \int\limits_{0}^{P} \int\limits_{\sigma_\rho} \left\{ \varDelta_1(\varrho) \frac{\cos(rx)}{r^2} + \varDelta_2(\varrho) \frac{\cos(ry)}{r^2} \right.$$

$$\left. + \varDelta_3(\varrho) \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} \frac{1 + \varrho \Psi}{\varrho}\, d\sigma_\rho\, d\varrho + \varDelta(\varrho'), {}^{*})$$

---

*) Indem wir die Integration nach σ wieder über die ganzen Kurven σ_ρ erstrecken, fügen wir nur eine Gröfse $\varDelta(\varrho')$ hinzu, die durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Das Integral nach ϱ ist eigentlich so zu schreiben:

$$\lim_{\delta = 0} \int\limits_{\delta}^{P} (-)\, d\varrho \text{ (vgl. Anm. 1, S. 92).}$$

wo Ψ eine stets endliche Funktion vorstellt, so dass wir die $(1+\varrho\cdot\Psi)$ in die $\varDelta_1(\varrho)$, $\varDelta_2(\varrho)$, $\varDelta_3(\varrho)$ hereinziehen können, und unter jeder Kurve σ_ρ die Kurve der Fläche verstanden wird, welche an jeder Stelle von der Randkurve σ den kürzesten Abstand ϱ hat.

Es ist nunmehr im ganzen $\varrho'\,\frac{\partial W}{\partial h'}$ von der Form:

$$149)\quad \varrho'\,\frac{\partial W}{\partial h'}=\varDelta(\varrho')+D\left(\frac{\varrho'}{P}\right)+\varrho'\int\limits_0^P\int\limits_{\sigma_\rho}\left\{\varDelta_1(\varrho)\frac{\cos(rx)}{r^2}+\varDelta_2(\varrho)\frac{\cos(ry)}{r^2}+\varDelta_3(\varrho)\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\}\frac{d\sigma_\rho\,d\varrho}{\varrho}.$$

Nun ist nach früheren Resultaten:*)

$$150)\quad \begin{cases} \varrho_1'\int\limits_{\sigma_\rho}\frac{\cos(rx)}{r^2}\,d\sigma_\rho=\alpha+D_1(\varrho_1'),\\ \varrho_1'\int\limits_{\sigma_\rho}\frac{\cos(ry)}{r^2}\,d\sigma_\rho=\beta+D_2(\varrho_1'),\\ \varrho_1'\int\limits_{\sigma_\rho}\frac{\cos(rz)}{r^2}\,d\sigma_\rho=\gamma'+D_3(\varrho_1'),\end{cases}$$

wo $\alpha\beta\gamma'$ endliche Konstanten sind und $D_1\,D_2\,D_3$ durch Verkleinerung der kürzesten Entfernung ϱ_1' des Punktes $(\xi'\eta'\zeta')$ von σ_ρ**) unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können. Es wird hiernach:

$$151)\quad \varrho'\,\frac{\partial W}{\partial h'}=\varDelta(\varrho')+D\left(\frac{\varrho'}{P}\right)+\varrho'\int\limits_0^P\frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho\cdot\varrho_1'}\,d\varrho.$$

Bezeichnen wir nun mit ϱ_0' den kleinsten Wert von ϱ_1', also die kleinste Entfernung des Punktes $(\xi'\eta'\zeta')$ von der Fläche, so ist:

$$152)\quad \text{abs}\cdot\varrho'\int\limits_0^P\frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho\cdot\varrho_1'}\,d\varrho\leqq\frac{\varrho'}{\varrho_0'}\,D(P),$$

wo wieder $D(P)$ durch Verkleinerung von P unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

---

*) Auch wenn man für $\frac{\cos(rx)}{r^2}$, $\frac{\cos(ry)}{r^2}$, $\frac{\cos(rz)}{r^2}$ ihre absoluten Werte setzt. ([20])

**) Also auch durch Verkleinerung von P.

Bezeichnen wir mit θ den Winkel, unter dem die beiden Flächen ω und ω' in O zusammentreffen, so ist:

$$153)\quad \frac{\varrho}{\varrho_0'} \begin{cases} = 1, & (\text{falls } \cos\theta \gtreqless 0), \\ \gtreqless \frac{1}{\sin\theta} + \varepsilon, & (\ \text{„} \quad \cos\theta \lesseqgtr 0), \end{cases}$$

wo ε eine Gröfse vorstellt, die durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und wir können nun nach den Formeln 151), 152), 153), da wir noch $P = \varrho'^{\lambda'}$ $(0 < \lambda' < 1)$ setzen können, das folgende Resultat aussprechen, das leicht auf den Fall auszudehnen ist, dass die Randkurve Trennungspunkte besitzt (22):

Zusatz zu VIIc). Genügt $\varkappa$ mit seinen ersten Ableitungen den Voraussetzungen des Satzes VIIc), so werden für die ersten Ableitungen des über ein stetig gekrümmtes Flächenstück ω zu erstreckenden Integrales:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

bei genügend kleiner Entfernung ϱ' des variabeln Punktes von der Randkurve σ auf einer Fläche ω', welche mit ω dieselbe Randkurve hat, die Formeln gelten:

$$154)\quad \frac{\partial W}{\partial h'} = \frac{\varDelta(\varrho')}{\varrho'},$$

wo h' eine zu ω' tangentiale Richtung, $\varDelta(\varrho')$ eine Gröfse vorstellt, die durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, unter der Voraussetzung, dass die Flächen ω und ω' unter einem von null verschiedenen Winkel zusammentreffen.

§ 5.

Mit Hilfe des Zusatzes können wir jetzt den Satz VIIc) selbst in folgender Weise verallgemeinern:

VIIIa) Ist $\varkappa$ eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion*) der Stelle auf irgend einem Flächenstücke ω, deren erste Ableitungen eindeutig und stetig [deren zweite Ableitungen endlich] sind, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve und den Trennungskurven der Flächenteile hält, auf denen

$$\varkappa,\ \cos(\nu x),\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

eindeutig und stetig sind, und lassen sich bei genügender Annäherung an diese Kurven die ersten Ableitungen von $\varkappa$ in der Form darstellen:

*) Man vgl. die Bemerkung in Anm. (21).

$$155)\quad \frac{\partial \varkappa}{\partial \mathrm{h}} = \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho},$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung der betreffenden Stelle von den genannten Kurven vorstellt und die Gröfse $\Delta(\varrho)$ durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, so kann man über die Randwerte des Flächenintegrales:

$$\mathrm{W} = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2} d\omega$$

an der Fläche ω folgendes aussagen:

Es ist W eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle an der Fläche, deren erste tangentiale [und normale] Ableitungen eindeutig und stetig [deren zweite tangentialen Ableitungen endlich] sind, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve und den Trennungskurven*) von Flächenteilen hält, auf denen

$$\mathrm{W},\ \cos(\nu \mathrm{x}),\ \cos(\nu \mathrm{y}),\ \cos(\nu \mathrm{z})$$

eindeutig und stetig sind, und es lassen sich bei genügender Annäherung an diese Kurven die ersten tangentialen Ableitungen von W in der Form schreiben:

$$156\mathrm{a})\quad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{h}} = \frac{\Delta(\varrho)}{\varrho},$$

wo wieder ϱ die kürzeste Entfernung der betreffenden Stelle von den genannten Kurven vorstellt und die Gröfse $\Delta(\varrho)$ durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Zusatz 1 zu VIIIa) Bei genügender Annäherung des variabeln Punktes auf einer Fläche ω', welche mit ω die Randkurve oder eine Trennungskurve gemein hat, an einen Punkt P dieser Kurve gelten die Formeln:

$$156\mathrm{b})\quad \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{h}'} = \frac{\Delta(\varrho')}{\varrho'},$$

wo h' eine zu ω' tangentiale Richtung, $\Delta(\varrho')$ eine Gröfse vorstellt, die durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, unter der Voraussetzung, dass die Flächen ω und ω' in jenem Punkte P unter einem von null verschiedenen Winkel zusammentreffen.

---

*) Das sind dieselben Trennungskurven, wie vorher.

Der Beweis des Zusatz 1 enthält zugleich den Beweis ([23]) für den Zusatz 2 zu VIIIa). Ist $\varkappa$ auf ω überall eindeutig und stetig und an der Randkurve null, so gelten die Formeln 156b) nicht blofs für die tangentialen Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial h'}$, sondern auch für die normalen Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial \nu'}$ an der Fläche ω'.

Durch Schritt für Schritt analoge ([24]) Beweismethoden, wie wir zu dem Satze VIIIa) und seinen beiden Zusätzen über W gelangten, erhält man die entsprechenden Resultate für die Integrale V:

VIIIb) Ist in dem Flächenintegrale:

$$157)\quad V = \int_\omega H \frac{d\omega}{r}$$

H auf ω (abteilungsweise) eindeutig und stetig, solange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält, die bei der Integration auszuschliefsen sind, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$158)\quad H = \frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho},$$

so ist die normale Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ auf ω (abteilungsweise) eindeutig und stetig, solange man sich in endlicher Entfernung von jenen Trennungskurven hält, und es gelten bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$159a)\quad \frac{\partial V}{\partial \nu} = \frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho}{}^{*)}.$$

Zusatz 1 zu VIIIb). Bei genügender Annäherung des variabeln Punktes auf einer Fläche ω', welche mit ω die Randkurve oder eine Trennungskurve gemein hat, an einen Punkt P dieser Kurven gelten die Relationen:

$$159b)\quad \frac{\partial V}{\partial \nu'} = \frac{\varDelta(\varrho')}{\varrho'},$$

unter der Voraussetzung, dass die Flächen ω und ω' in jenem Punkte P unter einem von null verschiedenen Winkel zusammentreffen.

---

*) Die $\varDelta(\varrho)$ sind dabei natürlich nicht dieselben, wie in 158).

Zusatz 2 zu VIIIb). Die Relationen 159b) gelten bei den Voraussetzungen des Satzes VIIIb) auch für die tangentialen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial h}$, an der Fläche ω'.

Bemerkung. Die Voraussetzung S. 94, dass die ersten Ableitungen von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auf den stetig gekrümmten Teilen von ω eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen endlich sein sollen, ist nur für die Behauptung (in VIIc) und) in VIIIa) von nöten, dass in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven die zweiten tangentialen Ableitungen von W endlich sind; macht man die genannte Voraussetzung nicht, so kann man nur aussagen, dass die ersten Ableitungen von W in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven eindeutig und stetig sind, im übrigen hat jene Voraussetzung auf die Sätze VIIIa), VIIIb) und ihre Zusätze keinen Einfluss.

3. Kapitel.

Die Transformation der Laplaceschen Differentialgleichung in beliebige dreifach orthogonale Koordinaten u, v, w.

§ 1.

Wir denken uns durch die Gleichungen:

$$160) \begin{cases} x = x\,(u, v, w), \\ y = y\,(u, v, w), \\ z = z\,(u, v, w), \end{cases}$$

drei neue Koordinaten eingeführt, von solcher Beschaffenheit, dass die drei Flächenscharen:

$$161) \begin{cases} u = \text{const.}, \\ v = \text{const.}, \\ \quad = \text{const.} \end{cases}$$

dreifach orthogonale Flächenscharen bilden, so dass die Auflösungen der Gleichungen 160):

$$162) \begin{cases} u = u\,(x, y, z), \\ v = v\,(x, y, z), \\ w = w\,(x, y, z) \end{cases}$$

den Bedingungen genügen:

$$163)\quad \begin{cases} \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z}=0, \\ \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial u}{\partial z}=0, \\ \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}=0; \end{cases}$$

wir suchen die Laplacesche Differentialgleichung für eine Funktion Φ:

$$\Delta\Phi \equiv \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0$$

in die neuen Koordinaten u, v, w zu transformieren.

Es folgt durch Differentiation der Gleichungen 160) nach x, y, z:

$$164a)\quad \begin{cases} 1=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ 0=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ 0=\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}; \end{cases}$$

$$164b)\quad \begin{cases} 0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ 1=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ 0=\frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}; \end{cases}$$

$$164c)\quad \begin{cases} 0=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial x}, \\ 0=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial y}, \\ 1=\frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Wir multiplizieren jede dieser drei Formelgruppen resp. mit $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}$ und addieren, dann folgt mit Rücksicht auf die Orthogonalitätsbedingungen 163):

$$165)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} = \dfrac{\partial x}{\partial u}\, U^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{\partial y}{\partial u}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} = \dfrac{\partial y}{\partial u}\, U^2, \\ \dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\left\{\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right\} = \dfrac{\partial z}{\partial u}\, U^2, \end{cases}$$

wo:

$$166)\quad U^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2.$$

Quadrieren und addieren wir die Formeln 165), so folgt:

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = U^4\left[\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right],$$

oder:

$$167)\quad \frac{1}{U^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2.$$

Durch diese und zwei analoge Rechnungen folgt somit, dass, falls wir:

$$168)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{U^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial u}\right)^2, \\ \dfrac{1}{V^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial v}\right)^2, \\ \dfrac{1}{W^2} = \left(\dfrac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial w}\right)^2 \end{cases}$$

setzen:

$$169)\quad \begin{cases} U^2 = \left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u}{\partial z}\right)^2, \\ V^2 = \left(\dfrac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial v}{\partial z}\right)^2, \\ W^2 = \left(\dfrac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial w}{\partial z}\right)^2 \text{ wird.} \end{cases}$$

Es sei nun Φ eine beliebige Funktion von (x, y, z), dann ist:

$$170)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial x}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \dfrac{\partial \Phi}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial z} + \dfrac{\partial \Phi}{\partial w}\dfrac{\partial w}{\partial z}. \end{cases}$$

Quadrieren und addieren wir diese Gleichungen, so folgt:

$$171)\quad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 = U^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\right)^2 + V^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}\right)^2.$$

Differenzieren wir dieselben Gleichungen resp. nach x, y, z und addieren, so wird:

$$172)\quad \begin{cases} \Delta \Phi = \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial u^2} U^2 + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial v^2} V^2 + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial w^2} W^2 \\ \qquad + \dfrac{\partial \Phi}{\partial u} \Delta u + \dfrac{\partial \Phi}{\partial v} \Delta v + \dfrac{\partial \Phi}{\partial w} \Delta w. \end{cases}$$

Wir wollen hier die Gröfsen Δu, Δv, Δw noch etwas umformen; wir differenzieren hierzu die Gleichungen 165) resp. nach x, y, z und addieren, dann ergiebt sich:

$$173)\quad \Delta u = 2U\frac{\partial U}{\partial u} + U^2\left(\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial z}\right);$$

andererseits folgt durch Differentiation der drei Gleichungen 168) nach u:

$$-\frac{1}{U^3}\frac{\partial U}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial^2 y}{\partial u^2} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2},$$
$$-\frac{1}{V^3}\frac{\partial V}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial y}{\partial v}\frac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u},$$
$$-\frac{1}{W^3}\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial^2 x}{\partial w\,\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial^2 y}{\partial w\,\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial^2 z}{\partial w\,\partial u},$$

oder mit Rücksicht auf die Formeln 165) und die beiden denselben analogen Formelgruppen:

$$174)\quad \begin{cases} -\dfrac{1}{U}\dfrac{\partial U}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial u^2}\dfrac{\partial u}{\partial z}, \\ -\dfrac{1}{V}\dfrac{\partial V}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial u}\dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial v\,\partial u}\dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial v\,\partial u}\dfrac{\partial v}{\partial z}, \\ -\dfrac{1}{W}\dfrac{\partial W}{\partial u} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial w\,\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial x} + \dfrac{\partial^2 y}{\partial w\,\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial^2 z}{\partial w\,\partial u}\dfrac{\partial w}{\partial z}, \end{cases}$$

und durch Addition dieser drei Gleichungen:

$$175)\quad -\frac{1}{U}\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{1}{V}\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{1}{W}\frac{\partial W}{\partial u} = \frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial x} + \frac{\partial^2 y}{\partial u\,\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial u\,\partial z}.$$

Setzen wir dies in 173) ein, so folgt:

$$\Delta u = U\frac{\partial U}{\partial u} - \frac{U^2}{V}\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{U^2}{W}\frac{\partial W}{\partial u}$$

oder:

$$\Delta u = UVW\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{U}{VW}\right),$$

analog:

$$176)\quad \begin{cases} \Delta u = UVW\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{U}{VW}\right), \\ \Delta v = UVW\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{V}{WU}\right), \\ \Delta w = UVW\dfrac{\partial}{\partial u}\left(\dfrac{W}{UV}\right). \end{cases}$$

Wir können hiernach die Gleichung 172) auch folgendermafsen schreiben:

$$177)\quad \Delta\Phi = UVW\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\frac{U}{VW}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot\frac{V}{WU}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial w}\cdot\frac{W}{UV}\right)\right],$$

und wir sind damit zu dem folgenden Satze von Jacobi gelangt:

IX. Führt man an Stelle von (x, y, z) dreifach orthogonale Koordinaten durch Transformationsgleichungen von der Form:

$$x = x(u, v, w),$$
$$y = y(u, y, w),$$
$$z = z(u, v, w)$$

ein, so ist für irgend eine Funktion Φ von (x, y, z) identisch:

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)^2 \equiv U^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\right)^2 + V^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\right)^2 + W^2\left(\frac{\partial\Phi}{\partial w}\right)^2,$$

$$\Delta\Phi \equiv UVW\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial u}\cdot\frac{U}{VW}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial v}\cdot\frac{V}{WU}\right) + \frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial w}\cdot\frac{W}{UV}\right)\right].$$

wenn:

$$\frac{1}{U^2}{}^{*)} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2,$$
$$\frac{1}{V^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$
$$\frac{1}{W^2} = \left(\frac{\partial x}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial w}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial w}\right)^2,$$

gesetzt wird.

---

*) Die Vorzeichen von UVW sind willkürlich; es ist auf die obigen Gleichungen ohne Einfluss, wenn man etwa U mit (— U) vertauscht.

Die Laplacesche Differentialgleichung lautet in den Koordinaten u, v, w:

$$178)\quad \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial u}\cdot\frac{U}{VW}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial v}\cdot\frac{V}{UW}\right)+\frac{\partial}{\partial w}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial w}\cdot\frac{W}{UV}\right)=0.$$

§ 2.

Wir wählen als Beispiel die Transformation in Polarkoordinaten $r\theta\varphi$ durch Transformationsgleichungen von der Form:

$$179)\quad \begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta\cos\varphi, \\ z = r\sin\theta\sin\varphi. \end{cases}$$

Die Gröfsen $r\theta\varphi$ haben hier die folgenden Bedeutungen: Es ist r die Entfernung des Punktes (xyz) vom Anfangspunkt O, ferner θ der Winkel, den die Richtung

O ⟶ (xyz)

mit der x Axe bildet und endlich φ der Winkel, den die Projektion dieser Richtung auf die yz Ebene mit der y Axe bildet, positiv zu rechnen, wenn von der positiven x Seite gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers.

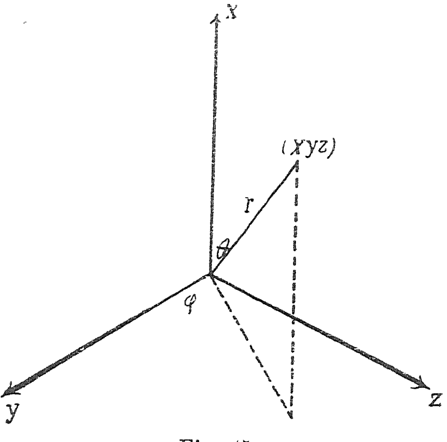


Fig. 45.

Die Flächenscharen:

$$r = \text{const.},$$
$$\theta = \text{const.},$$
$$\varphi = \text{const.}$$

sind dreifach orthogonale Flächenscharen, denn es sind die Flächen

$$r = \text{const.}$$

konzentrische Kugelflächen mit O als Centrum, die Flächen

$$\theta = \text{const.}$$

Kreiskegelflächen, deren Spitze in O liegt und deren Axen mit der x Axe zusammenfallen, und die Flächen:

$$\varphi = \text{const.}$$

sind Ebenen, die die x Axe enthalten.

Es ist nach den Transformationsgleichungen 179):

$$180) \begin{cases} \dfrac{\partial x}{\partial r} = \cos\theta, & \dfrac{\partial y}{\partial r} = \sin\theta\cos\varphi, & \dfrac{\partial z}{\partial r} = \sin\theta\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \theta} = -\,r\sin\theta, & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos\theta\cos\varphi, & \dfrac{\partial z}{\partial \theta} = r\cos\theta\sin\varphi, \\ \dfrac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, & \dfrac{\partial y}{\partial \varphi} = -\,r\sin\theta\sin\varphi, & \dfrac{\partial z}{\partial \varphi} = r\sin\theta\cos\varphi, \end{cases}$$

somit wird:

$$181) \begin{cases} \dfrac{1}{U^2} \equiv \left(\dfrac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial r}\right)^2 = 1, \\ \dfrac{1}{V^2} \equiv \left(\dfrac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = r^2, \\ \dfrac{1}{W^2} \equiv \left(\dfrac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2 = r^2\sin^2\theta, \end{cases}$$

also:

$$182) \begin{cases} U = 1, \\ V = \dfrac{1}{r}, \\ W = \dfrac{1}{r\sin\theta}. \end{cases}$$

Nach Satz IX wird also für irgend eine Funktion Φ:

$$183) \begin{cases} \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial y}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial z}\right)^2 = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right)^2 + \dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)^2, \\ \Delta\Phi = \dfrac{1}{r^2\sin\theta}\left[\dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial r}\, r^2\sin\theta\right) + \dfrac{\partial}{\partial \theta}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \theta}\sin\theta\right) + \dfrac{\partial}{\partial \varphi}\left(\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial \Phi}{\partial \varphi}\right)\right], \end{cases}$$

und die Laplace'sche Differentialgleichung lautet in Polarkoordinaten:

$$184) \quad \frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial \Phi}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0.$$

II. Teil.

Die Flächenpotentiale V und die Flächenintegrale W für eine Kugelfläche.

(Theorie der Kugelfunktionen.)

Wir werden in diesem II. Teile die Flächenpotentiale:

$$1)\quad V = \int\limits_{\omega} \frac{H\,d\omega}{r}$$

und die Flächenintegrale:

$$2)\quad W = \int\limits_{\omega} \varkappa\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

wirklich zu berechnen versuchen, wenn ω eine gegebene Kugelfläche von dem Radius R mit der inneren Normalen ν, $\varkappa$ und H gegebene Funktionen der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf der Kugel vorstellen. Wir werden uns dabei stets zweckmäſsig der Polarkoordinaten bedienen, indem wir das Centrum O der Kugel zum Anfangspunkt nehmen und einem jeden variablen Punkte $(x\,y\,z)$ die Polarkoordinaten $r_1\,\theta_1\,\varphi_1$ durch die Transformationsgleichungen zuordnen:

$$3)\quad \begin{cases} x = r_1 \cos\theta_1, \\ y = r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1, \\ z = r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1. \end{cases}$$

Es ist dann*) r_1 der Abstand des Punktes (xyz) von O, θ_1 der Winkel, den die Richtung

$$O \longrightarrow (xyz)$$

mit der x Axe bildet, und φ der Winkel der Projektion dieser Richtung auf die yz Ebene mit der y Axe, positiv gerechnet, wenn von der positiven x Seite gesehen, im umgekehrten Sinne des Uhrzeigers.

Die Polarkoordinaten eines Punktes $(\xi\eta\zeta)$ der Kugelfläche bezeichnen wir mit R, θ, φ, so dass:

$$4) \quad \begin{cases} \xi = R\cos\theta, \\ \eta = R\sin\theta\cos\varphi, \\ \zeta = R\sin\theta\sin\varphi. \end{cases}$$

Es ist dann die Entfernung r der Punkte (xyz) und $(\xi\eta\zeta)$ gegeben durch die Formel:

$$r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2},$$
$$= \sqrt{R^2 - 2Rr_1\{\cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_1-\varphi)\} + r_1^2},$$

oder:

$$5) \quad r = \sqrt{R^2 - 2Rr_1\cos\gamma + r_1^2},$$

wo:

$$6) \quad \cos\gamma = \cos\theta\cos\theta_1 + \sin\theta\sin\theta_1\cos(\varphi_1-\varphi)$$

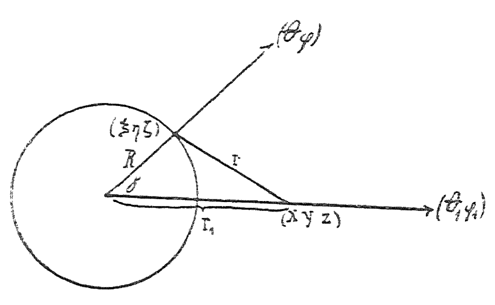


Fig. 46.

und γ den Winkel vorstellt, den die Richtungen:

$(\theta\varphi)$ d. i. $O \longrightarrow (\xi\eta\zeta)$

und:

$(\theta_1\varphi_1)$ d. i. $O \longrightarrow (xyz)$

mit einander einschließen.

Die Funktionen H und $\varkappa$ sind als Funktionen von θ und φ gegeben zu denken:

$$7) \quad H = H(\theta, \varphi),$$

$$8) \quad \varkappa = \varkappa(\theta, \varphi);$$

*) Man vergleiche Fig. 45; nur setze man an Stelle der dortigen Bezeichnungen $r\theta\varphi$ jetzt: $r_1\theta_1\varphi_1$.

es wird somit:

$$9)\quad \begin{cases} V = \int\limits_{(R)} \frac{H(\theta, \varphi)}{\sqrt{R^2 - 2Rr_1\cos\gamma + r_1^2}}\, d\omega, \\ W = -\int\limits_{(R)} \varkappa(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr_1\cos\gamma + r_1^2}}\right) d\omega, \end{cases}$$

wo $\cos\gamma$ den Wert 6) hat und wir von der Identität:

$$\frac{\cos(r\nu)}{r^2} \equiv + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\cos(\nu x) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\cos(\nu y) + \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\cos(\nu z),$$

$$\equiv - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\xi}\frac{\partial\xi}{\partial R} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\eta}\frac{\partial\eta}{\partial R} - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial\zeta}\frac{\partial\zeta}{\partial R},$$

$$\equiv - \frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R}$$

Gebrauch gemacht haben.

Das Flächenelement $d\omega$ der Kugelfläche können wir in folgender Weise in Polarkoordinaten ausdrücken:

Wir denken uns die Kegel θ und $\theta + d\theta$, sowie die Ebenen φ und $\varphi + d\varphi$, dann hat das kleine Rechteck $d\omega$, das von diesen vier Flächen aus der Kugel ausgeschnitten wird, die Seiten:

$$AB = R\, d\theta,$$
$$BC = R\sin\theta\, d\varphi,$$

es ist somit:

$$10)\quad d\omega = R^2 \sin\theta\, d\theta\, d\varphi,$$

und falls man über alle Elemente $d\omega$ der Kugel zu integrieren hat, muss man

über θ von 0 bis π,
über φ von 0 bis 2π

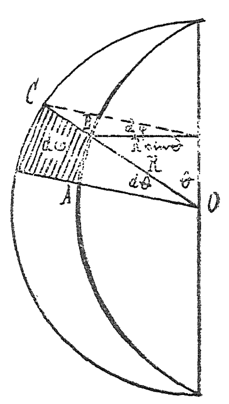


Fig. 47.

integrieren, was wir durch die symbolische Formel:

$$11)\quad \int\limits_{(R)} (-)\, d\omega = \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi} R^2(\text{——})\sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

ausdrücken wollen. Es werden hiernach die Formeln 9):

$$
12)\quad
\begin{cases}
V = \displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{R^2 H(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi}{\sqrt{R^2 - 2 R r_1 \cos\gamma + r_1^2}}, \\[2ex]
W = -\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} R^2 \varkappa(\theta, \varphi) \frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{1}{\sqrt{R^2 - 2 R r_1 \cos\gamma + r_1^2}}\right) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,
\end{cases}
$$

wobei nach wie vor:

$$\cos\gamma = \cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi_1 - \varphi).$$

Als die geeignetste Methode, die Integrationen 12) wirklich auszuführen, hat sich nun die erwiesen, sowohl den Ausdruck:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2 R r_1 \cos\gamma + r_1^2}}$$

als auch die Funktionen $\varkappa$ und H in unendliche Reihen zu entwickeln:

$$
13)\quad
\begin{cases}
H(\theta, \varphi) = \displaystyle\sum_0^{\infty}{}_n H_n(\theta, \varphi), \\[2ex]
\varkappa(\theta, \varphi) = \displaystyle\sum_0^{\infty}{}_n \varkappa_n(\theta, \varphi), \\[2ex]
\dfrac{1}{r} = \displaystyle\sum_0^{\infty}{}_n Y_n(\theta, \varphi),
\end{cases}
$$

von solcher Art, dass die durch die Formeln 12) geforderten Integrationen:

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} H_j(\theta, \varphi) \, Y_s(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \varkappa_j(\theta, \varphi) \, Y_s(\theta, \varphi) \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$$

möglichst einfach werden. Zu diesen Entwickelungen wollen wir nunmehr übergehen.

I. Abschnitt.

Entwickelung des Ausdruckes $\frac{1}{r}$ in eine unendliche nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe.

---

1. Kapitel.

Die Funktionen P_n.

§ 1.

Wir nehmen zunächst den Punkt $(\xi\eta\zeta)$ auf der x Axe an, den variabeln Punkt (xyz) in der xy Ebene, so dass:

$$r^2 = R^2 - 2Rr_1 \cos\vartheta_1 + r_1^2,$$

also:

$$14)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr_1 \cos\vartheta_1 + r_1^2}}.$$

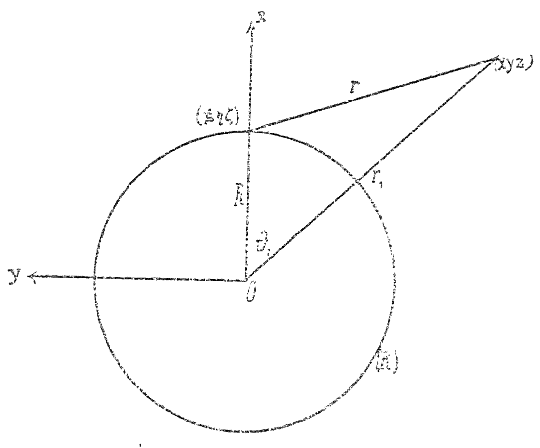


Fig. 48.

Es liege (xyz) zuerst aufserhalb der Kugel (R). Wir schreiben 14) in folgender Weise:

$$15)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_1}\left(1 - 2\dfrac{R}{r_1}\cos\vartheta_1 + \left(\dfrac{R}{r_1}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}, \\[2ex] \quad = \dfrac{1}{r_1}\left(1 - \dfrac{R}{r_1}e^{i\vartheta_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1 - \dfrac{R}{r_1}e^{-i\vartheta_1}\right)^{-\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

Nun ist, wenn $R < r_1$ ist, nach dem binomischen Satze:

$$16)\quad \begin{cases} \left(1 - \frac{R}{r_1} e^{i\theta_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} {}^n \frac{\Pi(2n)}{[2^n\, \Pi(n)]^2} \left(\frac{R}{r_1}\right)^n e^{+in\theta_1}, \\ \left(1 - \frac{R}{r_1} e^{-i\theta_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} {}^n \frac{\Pi(2n)}{[2^n\, \Pi(n)]^2} \left(\frac{R}{r_1}\right)^n e^{-in\theta_1}, \end{cases}$$

wenn wir uns der üblichen Abkürzung:*)

$$17)\quad \Pi(\varkappa) = 1 \cdot 2 \ldots \varkappa$$

bedienen.

Multipliciren wir die beiden Reihen 16) miteinander und ordnen nach Potenzen von $\frac{R}{r_1}$, so wird die so entstehende Reihe:

$$18)\quad \left(1 - \frac{R}{r_1} e^{i\theta_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R}{r_1} e^{-i\theta_1}\right)^{-\frac{1}{2}} = \sum_0^{\infty} {}^n f_n(\theta_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^n$$

konvergent sein, wenn wir zeigen können, dass jedes $f_n^2(\theta_1)$ für beliebige reelle θ_1 kleiner oder gleich eins ist. Es ist nun nach 16):

$$\begin{aligned} f_n(\theta_1) = {} & \frac{\Pi(2n)}{[2^n\, \Pi(n)]^2} \cdot \frac{\Pi(2 \cdot o)}{[2^0\, \Pi(o)]^2} \left(e^{in\theta_1} + e^{-in\theta_1}\right) \\ & + \frac{\Pi(2n-2)}{[2^{n-1}\, \Pi(n-1)]^2} \cdot \frac{\Pi(2 \cdot 1)}{[2^1\, \Pi(1)]^2} \left(e^{i(n-2)\theta_1} + e^{-i(n-2)\theta_1}\right) \\ & + \cdots \\ & + \begin{cases} \dfrac{\Pi(n+1)}{\left[2^{\frac{n+1}{2}} \Pi\left(\frac{n+1}{2}\right)\right]^2} \cdot \dfrac{\Pi(n-1)}{\left[2^{\frac{n-1}{2}} \Pi\left(\frac{n-1}{2}\right)\right]^2} \left(e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1}\right), & \text{falls } n \text{ ungerade,} \\ \dfrac{\Pi(n)}{\left[2^{\frac{n}{2}} \Pi\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2} \cdot \dfrac{\Pi(n)}{\left[2^{\frac{n}{2}} \Pi\left(\frac{n}{2}\right)\right]^2}, & \text{falls } n \text{ gerade ist;} \end{cases} \end{aligned}$$

---

*) Wir setzen, ebenfalls in üblicher Weise:

$$\Pi(o) = 1,$$

Glieder einer Reihe, in denen Π (negativen ganzen Zahl) vorkommt, gleich null.

oder:

$$19)\ f_n(\theta_1)=a_n \cos n\theta_1+a_{n-2}\cos(n-2)\theta_1+\cdots+\begin{cases} a_1 \cos\theta_1, & \text{falls n ungerade,}\\ a_0, & \text{falls n gerade ist.}\end{cases}$$

wo die $a_n\ a_{n-2}\ldots$ positive Zahlenfaktoren vorstellen und im besonderen a_n den Wert besitzt:

$$20)\quad a_n=\begin{cases} 2\dfrac{\Pi(2n)}{[2^n\,\Pi(n)]^2}, & n \neq 0,\\ 1, & n=0.\end{cases}$$

Aus der Formel 19) folgt sofort:

$$21)\quad \text{abs. } f_n(\theta_1) \leqq \text{abs. } f_n(o),$$

und es ist nach 18) für $\theta_1=0$:

$$\left.\begin{array}{l} \left(1-\dfrac{R}{r_1}\right)^{-\frac{1}{2}}\left(1-\dfrac{R}{r_1}\right)^{-\frac{1}{2}} \\ \text{oder:} \\ \left(1-\dfrac{R}{r_1}\right)^{-1} \\ \text{oder:} \\ \sum_0^\infty{}^n\left(\dfrac{R}{r_1}\right)^n \end{array}\right\} = \sum_0^\infty{}^n f_n(o)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n.$$

Es folgt somit:

$$22)\quad f_n(o)=1$$

und nach 21):

$$23)\quad \text{abs. } f_n(\theta_1) \leqq 1,$$

womit die Konvergenz der Reihe 18), sowie der aus dieser Reihe durch Differentiationen nach R oder r_1 hervorgehenden Reihen bewiesen ist, sobald $R<r_1$ ist.

Nach 15) und 18) lässt sich, wie wir jetzt wissen, der Ausdruck

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{\sqrt{R^2-2Rr_1\cos\theta_1+r_1^2}}$$

durch die konvergente Reihe darstellen:

$$24)\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}\sum_0^\infty{}^n f_n(\theta_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n,\quad R<r_1,$$

wobei die $f_n(\theta_1)$ von der Form 19) sind:

$$f_n(\theta_1)=a_n\cos n\theta_1+a_{n-2}\cos(n-2)\theta_1+\cdots+\begin{cases} a_1\cos\theta_1, & \text{falls n ungerade,}\\ a_0, & \text{falls n gerade ist;}\end{cases}$$

die $a_n\, a_{n-2} \ldots$ sind hierin positive Zahlenfaktoren, und es ist im besonderen:

$$a_n = \begin{cases} 2\dfrac{\Pi(2n)}{[2^n\, \Pi(n)]^2}, & n \neq 0, \\ 1, & n = 0. \end{cases}$$

Die aus der Reihe 24) durch irgend welche Differentiationen nach R oder r_1 hervorgehenden Reihen werden wiederum konvergent sein.

Um die Funktionen $f_n(\theta_1)$ der Reihe 24) näher kennen zu lernen, wollen wir dieselben nicht mehr als Funktionen von θ_1, sondern als Funktionen von:

$$25) \quad \mu_1 = \cos\theta_1$$

auffassen, indem wir:

$$26) \quad f_n(\theta_1) = P_n(\mu_1)$$

setzen. Wir haben dann nach 24) für $\frac{1}{r}$ die Reihe:

$$27) \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1} \sum_0^{\infty} {}^n\, P_n(\mu_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^n, \quad R < r_1,$$

und es ist, da allgemein für jedes ganze m:[25]

$$28) \quad \cos m\theta_1 = \begin{cases} 2^{m-1}\cos^m\theta_1 + \alpha_2 \cos^{m-2}\theta_1 + \alpha_4 \cos^{m-4}\theta_1 + \cdots, & m \neq 0, \\ 1, & m = 0 \end{cases}$$

($\alpha_2\, \alpha_4 \ldots$ gewisse Zahlenfaktoren), jedes $P_n(\mu_1)$ von der Form:

$$P_n(\mu_1) = 2^n \frac{\Pi(2n)}{[2^n\, \Pi(n)]^2} \mu_1{}^n + A_{n,\,n-2}\, \mu_1{}^{n-2} + A_{n,\,n-4}\, \mu_1{}^{n-4} + \cdots$$
$$+ \begin{cases} A_{n,\,1}\, \mu_1, & \text{falls n ungerade,} \\ A_{n,\,0}, & \text{falls n gerade ist,} \end{cases}$$

wo die A gewisse Zahlenfaktoren darstellen, oder:

$$29) \quad P_n(\mu_1) = \sum_0^{\infty} {}^j\, A_{n,\,n-2j}\, \mu_1{}^{n-2j},$$

wo wir jedes:

$$30) \quad A_{n,\,\varkappa} = 0$$

setzen, in dem $\varkappa$ negativ ist, und uns überdies bekannt ist, dass:

$$31) \quad A_{n,\,n} = \frac{\Pi(2n)}{2^n\, [\Pi(n)]^2}.$$

Zur [illegible] der übrigen Koefficienten A bedienen wir uns der Kenntnis, dass $\frac{1}{r}$ der Laplaceschen Differ[illegible]

$$\varDelta\left(\frac{1}{r}\right) = 0$$

genügen muss, die wir nach Formel 184) des I. Teiles so schreiben können:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r_1}\right) + \frac{1}{\sin\theta_1}\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\theta_1}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta_1}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\varphi_1^2} = 0,$$

oder, da:

$$\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\theta_1} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\mu_1}\sin\theta_1,$$

$$\sin\theta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\theta_1} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\mu_1}(1-\mu_1^2),$$

$$\frac{\partial}{\partial\theta_1}\left(\sin\theta_1 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\theta_1}\right) = \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left\{(1-\mu_1^2)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\mu_1}\right\}\sin\theta_1,$$

auch in der Form:

$$32)\quad \frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left\{(1-\mu_1^2)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\mu_1}\right\} + \frac{1}{1-\mu_1^2}\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial\varphi_1^2} = 0.$$

Wenn im besonderen, wie in unserem Falle, r_1 von φ_1 unabhängig ist, folgt:

$$33)\quad \frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r_1}\right) + \frac{\partial}{\partial\mu_1}\left((1-\mu_1^2)\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial\mu_1}\right) = 0.$$

Setzen wir für $\frac{1}{r}$ den Wert 27), so ist:

$$r_1^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r_1} = -\sum_0^\infty{}^n (n+1)\, P_n(\mu_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n,$$

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1^2 \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial r_1}\right) = \frac{1}{r_1}\sum_0^\infty{}^n n(n+1)\, P_n(\mu_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n,$$

und die Differentialgleichung 33) erhält die Form:

$$\frac{1}{r_1}\sum_0^\infty {}^n \left(\frac{R}{r_1}\right)^n \left\{n(n+1)P_n(\mu_1) + \frac{d}{d\mu_1}\left((1-\mu_1^2)\frac{dP_n(\mu_1)}{d\mu_1}\right)\right\} = 0,$$

somit ist einzeln für jedes ganze positive n:

$$34)\quad n(n+1)P_n(\mu_1) + \frac{d}{d\mu_1}\left((1-\mu_1^2)\frac{dP_n(\mu_1)}{d\mu_1}\right) = 0.$$

Diese Gleichung 34) wird als die Differentialgleichung der Funktionen P_n bezeichnet. Wir setzen in derselben für $P_n(\mu_1)$ die Reihe 29) ein, dann folgt:

$$\sum_0^\infty {}^j \Big\{ n(n+1) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j} + \frac{d}{d\mu_1}\left[(1-\mu_1^2)(n-2j) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j-1}\right]\Big\} = 0,$$

oder:

$$\sum_0^\infty {}^j \Big\{ n(n+1) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j} + (1-\mu_1^2)(n-2j)(n-2j-1) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j-2} - 2(n-2j) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j}\Big\} = 0,$$

oder:

$$35)\quad \sum_0^\infty {}^j \Big\{ 2j(2n-2j+1) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j} + (n-2j)(n-2j-1) A_{n,n-2j}\, \mu_1^{n-2j-2}\Big\} = 0.\text{*)}$$

Indem wir diese Gleichung nach Potenzen von μ_1 ordnen und bedenken, dass die Koefficienten der einzelnen Potenzen von μ_1 verschwinden müssen, erhalten wir:

$$36)\quad \begin{cases} 2\cdot(2n-1)A_{n,n-2} + n(n-1)A_{n,n} = 0, \\ 4\cdot(2n-3)A_{n,n-4} + (n-2)(n-3)A_{n,n-2} = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \text{allgemein:} \\ 2j(2n-2j+1)A_{n,n-2j} + (n-2j+2)(n-2j+1)A_{n,n-2j+2} = 0. \end{cases}$$

Da wir nach 31) $A_{n,n}$ kennen, können wir aus 36) successive alle $A_{n,n-2j}$ berechnen, und wir erhalten:

$$37)\quad A_{n,n-2j} = (-1)^j \cdot \frac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2} \cdot \frac{n(n-1)(n-2)\ldots(n-2j+2)(n-2j+1)}{2^j\Pi(j)\cdot(2n-1)(2n-3)\ldots(2n-2j+1)}.$$

*) Da:

$$n(n+1) - (n-2j)(n-2j-1) - 2(n-2j) = 2j(n-2j+1).$$

Nun ist:

$$n(n-1)(n-2)\dots(n-2j+2)(n-2j+1) = \frac{\Pi(n)}{\Pi(n-2j)},$$

$$(2n-1)(2n-3)\dots(2n-2j+1) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)} \cdot \frac{2^{n-j}\Pi(n-j)}{\Pi(2n-2j)},$$

somit:

$$38)\quad A_{n,\,n-2j} = (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\,\Pi(n-2j)\,\Pi(n-j)}$$

und:

$$39)\quad P_n(\mu_1) = \sum_0^{\infty}{}^j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\,\Pi(n-2j)\,\Pi(n-j)}\, \mu_1^{n-2j},$$

oder (wie man sofort aus 36) folgern kann):

$$40)\quad P_n(\mu_1) = \frac{\Pi(2n)}{2^n \Pi(n)} \left\{ \mu_1^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)}\mu_1^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot (2n-1)(2n-3)}\mu_1^{n-4} + \dots \right\};$$

Die Reihen 39) resp. 40) brechen von selbst mit einem Gliede:

$$A_{n1}\,\mu_1 \quad \text{oder} \quad A_{n0}$$

ab, je nachdem n ungerade oder gerade ist.

Wir können die bisherigen Resultate etwa folgendermafsen zusammenfassen:

I. Bezeichnen wir die Polarkoordinaten eines Punktes der Kugelfläche (R) mit $(R\,\theta\,\varphi)$, die eines aufserhalb der Kugel gelegenen Punktes mit $(r_1\,\theta_1\,\varphi_1)$, und mit γ den Winkel, den die Richtungen $(\theta\varphi)$ und $(\theta_1\varphi_1)$ einschliefsen, so lässt sich die reciproke Entfernung der beiden Punkte:

$$41)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr_1\cos\gamma + r_1^2}}$$

in die folgende Reihe entwickeln:

$$42)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\sum_0^{\infty}{}^n P_n(\cos\gamma)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n, \quad (R < r_1).$$

Dabei sind allgemein die Funktionen $P_n(x)$ durch die Formel gegeben:

$$43)\quad P_n(x) = \frac{\Pi(2n)}{2^n [\Pi(n)]^2}\left(x^n - \frac{n(n-1)}{2(2n-1)} x^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\cdot 4\cdot(2n-1)(2n-3)} x^{n-4} - \dots\right),$$

oder:

$$44)\quad P_n(x) = \sum_0^{\infty} {}^j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\,\Pi(n-2j)\,\Pi(n-j)} x^{n-2j},$$

(Reihen, die von selbst mit einem Gliede:

$$A_{n,1} x \text{ oder } A_{n,0}$$

abbrechen, je nachdem n ungerade oder gerade ist), und erfüllen die Differentialgleichung:

$$45)\quad n(n+1) P_n(x) + \frac{d}{dx}\left((1-x^2)\frac{d P_n(x)}{dx}\right) = 0.$$

Die Reihe 42) konvergiert stets, da im Intervall:

$$-1 \leqq x \leqq +1:$$

$$46)\quad \text{abs.}\,[P_n(x)] \leqq P_n(1)$$

und:

$$47)\quad P_n(1) = 1$$

ist.

Zusatz 1 zu I. Liegt der Punkt $(r_1 \vartheta_1 \varphi_1)$ innerhalb der Kugel, so gilt für die reciproke Entfernung:

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{\sqrt{R^2 - 2Rr_1 \cos\gamma + r_1^2}}$$

die Entwickelung:

$$48)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_0^{\infty} {}^n P_n(\cos\gamma)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n, \quad (r_1 < R).$$

§ 2.

Es ist nach dem binomischen Satze:

$$(x^2 - 1)^n = \sum_0^{\infty} {}^j (-1)^j \frac{\Pi(n)}{\Pi(j)\,\Pi(n-j)} x^{2n-2j},$$

somit:

$$\frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = \sum_0^{\infty} j (-1)^j \frac{\Pi(n)}{\Pi(j)\,\Pi(n-j)} (2n-2j)(2n-2j-1)\ldots (n-2j+1) x^{n-2j},$$

oder da:

$$(2n-2j)(2n-2j-1)\ldots,(n-2j+1) = \frac{\Pi(2n-2j)}{\Pi(n-2j)},$$

$$49)\quad \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} = \sum_0^{\infty} j (-1)^j \frac{\Pi(n)\,\Pi(2n-2j)}{\Pi(j)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j)} x^{n-2j}.$$

Vergleichen wir die Formeln 44) und 49), so erkennen wir, es ist:

$$50)\quad P_n(x) = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Die Formel 50) gestattet uns, die Integrale:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx$$

zu berechnen. Es ist nach derselben:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = \frac{1}{2^{m+n}\,\Pi(m)\,\Pi(n)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n} dx,$$

oder, falls $m \lesseqgtr n$, nach m maliger partieller Integration

$$= \frac{(-1)^m}{2^{m+n}\,\Pi(m)\,\Pi(n)} \int_{-1}^{+1} \frac{d^{2m} (x^2-1)^m}{dx^{2m}} \cdot \frac{d^{n-m} (x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx,$$

da x^2-1 sowohl für $x=+1$, als auch für $x=-1$ verschwindet. Nun ist:

$$\frac{d^{2m} (x^2-1)^m}{dx^{2m}} = \Pi(2m),$$

somit:

$$51)\quad \int_{-1}^{+1} P_m(x) P_n(x)\, dx = \frac{(-1)^m\, \Pi(2m)}{2^{m+n}\, \Pi(m)\, \Pi(n)} \left| \frac{d^{n-m-1} (x^2-1)^n}{dx^{n-m-1}} \right|_{x=-1}^{x=+1}.$$

Ist $n \neq m$, also:

$$n = m + 1, \quad m + 2, \; \ldots$$

so folgt:

$$52) \quad \int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n;$$

ist dagegen $m = n$, so folgt:

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \frac{(-1)^n \Pi(2n)}{2^{2n}[\Pi(n)]^2} \int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n\, dx.$$

Nun ist, wie durch n malige partielle Integration folgt:

$$\int_{-1}^{+1} (x^2 - 1)^n dx = (-1)^n \frac{2^n \Pi(n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)} \int_{-1}^{+1} x^{2n} (x^2 - 1)^{n-n} dx,$$

$$= (-1)^n \frac{2^{n+1} \Pi(n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+1)},$$

$$= (-1)^n \frac{2^{2n+1} [\Pi(n)]^2}{\Pi(2n+1)},$$

somit:

$$53) \quad \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Zusatz 2 zu I. Die Funktionen $P_n(x)$ lassen sich in der Form darstellen:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n (x^2 - 1)^n}{dx^n}$$

und haben als Folge hiervon die Integraleigenschaften:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}.$$

2. Kapitel.

Die abgeleiteten Funktionen $P_n^{(i)}$ und die zugeordneten Funktionen P_{ni}.

§ 1.

Die Ableitungen der Funktionen $P_n(x)$:

$$P_n'(x) = \frac{dP_n(x)}{dx},$$

$$P_n''(x) = \frac{d^2P_n(x)}{dx^2},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$P_n^{(n)}(x) = \frac{d^nP_n(x)}{dx^n},$$

allgemein:

$$54) \quad P_n^{(i)}(x) = \frac{d^iP_n(x)}{dx^i}, \quad 0 \overline{\overline{<}} i \overline{\overline{<}} n$$

werden als die abgeleiteten Funktionen $P_n^{(i)}$ von x bezeichnet.

Da:

$$P_n(x) = \sum_0^{\infty} {}_j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\, \Pi(n-j)\, \Pi(n-2j)} x^{n-2j},$$

so ist:

$$P_n^{(i)}(x) = \sum_0^{\infty} {}_j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\, \Pi(n-j)\, \Pi(n-2j)} (n-2j)(n-2j-1)\ldots (n-2j-i+1)\, x^{n-2j-i},$$

oder da:

$$(n-2j)(n-2j-1)\ldots(n-2j-i+1) = \frac{\Pi(n-2j)}{\Pi(n-2j-i)},$$

auch:

$$55) \quad P_n^{(i)}(x) = \sum_0^{\infty} {}_j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\, \Pi(n-j)\, \Pi(n-2j-i)} x^{n-2j-i}.$$

Differenziert man die Differentialgleichung der $P_n(x)$:

$$n(n+1)P_n(x) - 2xP_n'(x) + (1-x^2)P_n''(x) = 0$$

mehrfach nach x, so folgt successive:

$$(n-1)(n+2)^{*)}\, P_n'(x) - 4x P_n''(x) + (1-x^2) P_n'''(x) = 0,$$
$$(n-2)(n+3)\; P_n''(x) - 6x P_n'''(x) + (1-x^2) P_n^{(IV)}(x) = 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ;$$

allgemein:

$$56)\quad (n-i)(n+i+1) P_n^{(i)}(x) - (2i+2)x \frac{d P_n^{(i)}(x)}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2 P_n^{(i)}(x)}{dx^2} = 0;$$

diese Gleichung heifst die Differentialgleichung der abgeleiteten Funktionen $P_n^{(i)}$, und wir können jetzt den Satz aussprechen:

IIa) Die abgeleiteten Funktionen $P_n^{(i)}(x)$:

$$P_n^{(i)}(x) = \sum_0^{\infty} {}^j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n \Pi(j)\, \Pi(n-j)\, \Pi(n-2j-i)} x^{n-2j-i}$$

erfüllen die Differentialgleichung:

$$(n-i)(n+i+1) P_n^{(i)}(x) - (2i+2)x \frac{d P_n^{(i)}(x)}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2 P_n^{(i)}(x)}{dx^2} = 0.$$

Wir wollen zeigen, dass irgend eine andere ganze rationale Funktion von x, welche dieser Differentialgleichung genügt, sich von $P_n^{(i)}(x)$ nur durch einen konstanten Faktor unterscheiden kann.

Wir nehmen hierzu an, es sei F eine ganze rationale Funktion von x, die jener Differentialgleichung genügt, so dass:

$$(n-i)(n+i+1) F - (2i+2)x \frac{dF}{dx} + (1-x^2) \frac{d^2 F}{dx^2} = 0;$$

wir multiplizieren diese Gleichung mit $P_n^{(i)}$, die Gleichung 56) mit F und subtrahieren, dann folgt:

$$-(2i+2)x \left\{ P_n^{(i)} \frac{dF}{dx} - F \frac{d P_n^{(i)}}{dx} \right\} + (1-x^2) \left\{ P_n^{(i)} \frac{d^2 F}{dx^2} - F \frac{d^2 P_n^{(i)}}{dx^2} \right\} = 0,$$

oder wenn wir mit $(1-x^2)^{i+1}$ multiplizieren und bedenken, dass

$$P_n^{(i)} \frac{d^2 F}{dx^2} - F \frac{d^2 P_n^{(i)}}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(P_n^{(i)} \frac{dF}{dx} - F \frac{d P_n^{(i)}}{dx} \right),$$

*) Es ist:

$$n(n+1) - 2 \equiv (n-1)(n+2),$$
$$(n-1)(n+2) - 4 \equiv (n-2)(n+3),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

allgemein:

$$(n-i+1)(n+i) - 2i \equiv (n-i)(n+i+1).$$

auch:

$$\frac{d}{dx}\left[(1-x^2)^{i+1}\left(P_n^{(i)}\frac{dF}{dx} - F\frac{dP_n^{(i)}}{dx}\right)\right] = 0,$$

$$P_n^{(i)}\frac{dF}{dx} - F\frac{dP_n^{(i)}}{dx} = \frac{C}{(1-x^2)^{i+1}},$$

wo C von x unabhängig ist.

Da F und $P_n^{(i)}$ ganze rationale Funktionen von x sind, folgt $C = 0$, und hieraus:

$$F = c \cdot P_n^{(i)},$$

wenn c eine willkürliche Konstante vorstellt.

Zusatz 1 zu IIa). Weifs man von irgend einer ganzen rationalen Funktion F von x, dass sie der Differentialgleichung genügt:

$$57)\quad (n-i)(n+i+1)\,F - (2i+2)\,x\frac{dF}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2F}{dx^2} = 0,$$

wo n und i ganze Zahlen vorstellen ($0 \leqq i \leqq n$), so ist

$$58)\quad F = c \cdot P_n^{(i)}(x),$$

wenn c eine willkürliche Konstante ist.

Die ersten Ableitungen der Funktionen $P_n(x)$:

$$59)\quad P_n'(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_j\,(-1)^j\,\frac{\Pi(2n-2j)}{2^n\,\Pi(j)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j-1)}\,x^{n-2j-1}$$

sind mit den $P_n(x)$ selbst durch zwei interessante Relationen verbunden, die uns in der Folge von Nutzen sein werden. Es ist nach 59):

$$P'_{n+1}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_j\,(-1)^j\,\frac{(2n+1-2j)\,(2n+2-2j)\,\Pi(2n-2j)}{2\,(n+1-j)\,2^n\,\Pi(n-j)\,\Pi(j)\,\Pi(n-2j)}\,x^{n-2j},$$

oder:

$$60)\quad P'_{n+1}(x) = \sum_{0}^{\infty}{}_j\,(-1)^j\,(2n+1-2j)\,\frac{\Pi(2n-2j)}{2^n\,\Pi(j)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j)}\,x^{n-2j}.$$

Andererseits ist, wiederum nach 59):

$$P'_{n-1}(x) = \sum_0^\infty {}_j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j-2)}{2^{n-1}\,\Pi(j)\,\Pi(n-j-1)\,\Pi(n-2j-2)} x^{n-2j-2},$$

$$= -\sum_1^\infty {}_j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^{n-1}\,\Pi(j-1)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j)} x^{n-2j},$$

$$= -\sum_1^\infty {}_j (-1)^j\, 2j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n\,\Pi(j)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j)} x^{n-2j},$$

oder:

$$61)\quad P'_{n-1}(x) = -\sum_0^\infty {}_j (-1)^j\, 2j \cdot \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n\,\Pi(j)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j)} x^{n-2j};$$

und es folgt durch Subtraktion von 60) und 61):

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1) \sum_0^\infty {}_j (-1)^j \frac{\Pi(2n-2j)}{2^n\,\Pi(j)\,\Pi(n-j)\,\Pi(n-2j)} x^{n-2j},$$

oder:

$$62)\quad P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\, P_n(x).$$

Wir schreiben diese Formeln noch einmal explicite für $n = 1, 2 \ldots$ hin:

$$P_2'(x) - P_0'(x) = 3 P_1(x),$$
$$P_3'(x) - P_1'(x) = 5 P_2(x),$$
$$P_4'(x) - P_2'(x) = 7 P_3(x),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\, P_n(x).$$

Addieren wir alle diese Formeln, so folgt:

$$P_n'(x) + P'_{n+1}(x) - P_0'(x) - P_1'(x) = 3 P_1(x) + 5 P_2(x) + 7 P_3(x) + \cdots + (2n+1)\, P_n(x),$$

oder, da:

$$P_0'(x) = 0,$$
$$P_1'(x) = 1 = P_0(x)$$

ist:

$$63)\quad P_n'(x) + P'_{n+1}(x) = \sum_0^n {}_j (2j+1)\, P_j(x).$$

Wir sprechen die Formeln 62) und 63) als einen besonderen Zusatz zu II a) aus:

Zusatz 2 zu II a). Die ersten Derivierten der Funktionen $P_n(x)$ sind mit diesen durch die beiden folgenden Relationen verbunden:

$$(2n+1)\,P_n(x) = P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x),$$

$$\sum_{0}^{n}{}_j\,(2j+1)\,P_j(x) = P_n'(x) + P'_{n+1}(x).$$

§. 2.

Nach Definition der abgeleiteten Funktionen $P_n^{(i)}$ durch die Formel 54) bezeichnet man weiter die Funktionen:

$$P_{n0}(x) = (\sqrt{1-x^2})^0 P_n\,(x),$$
$$P_{n1}(x) = (\sqrt{1-x^2})^1 P_n'(x),$$
$$P_{n2}(x) = (\sqrt{1-x^2})^2 P_n''(x),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$P_{nn}(x) = (\sqrt{1-x^2})^n P_n^{(n)}(x),$$

allgemein:

$$64)\quad P_{ni}(x) = (\sqrt{1-x^2})^i P_n^{(i)}(x), \quad 0 \leqq i \leqq n$$

als die zugeordneten Funktionen P_{ni} von x.

Da die Funktionen $P_n^{(i)}$ der Differentialgleichung:

$$(n-i)(n+i+1)P_n^{(i)} - (2i+2)x\frac{dP_n^{(i)}}{dx} + (1-x^2)\frac{d^2P_n^{(i)}}{dx^2} = 0$$

genügen, so genügen die Funktionen P_{ni} der Differentialgleichung:

$$(n-i)(n+i+1)\frac{P_{ni}}{(\sqrt{1-x^2})^i} - (2i+2)x\frac{d}{dx}\left[\frac{P_{ni}}{(\sqrt{1-x^2})^i}\right]$$
$$+ (1-x^2)\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{P_{ni}}{(\sqrt{1-x^2})^i}\right] = 0,$$

oder nach einer einfachen Umformung: [26]

$$65)\quad \left\{n(n+1) - \frac{i^2}{1-x^2}\right\} P_{ni} + \frac{d}{dx}\left[(1-x^2)\frac{dP_{ni}}{dx}\right] = 0.$$

IIb) Die zugeordneten Funktionen:

$$P_{ni}(x) = (\sqrt{1-x^2})^i P_n^{(i)}(x)$$

erfüllen die Differentialgleichung:

$$\left\{n(n+1) - \frac{i^2}{1-x^2}\right\} P_{ni}(x) + \frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\frac{dP_{ni}(x)}{dx}\right\} = 0.$$

Infolge der früher für $P_n(x)$ gefundenen Formel:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n \Pi(n)} \frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}$$

ist:

$$66)\quad P_{ni}(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})^i}{2^n \Pi(n)} \frac{d^{n+i}(x^2-1)^n}{dx^{n+i}}.$$

Diese Formel gestattet uns wieder, die Integrale:

$$\int_{-1}^{+1} P_{mi}(x) P_{ni}(x)\, dx$$

zu berechnen, wenn m und n beliebige positive ganze Zahlen sind. Es ist:

$$\int_{-1}^{+1} P_{mi}(x) P_{ni}(x) dx = \int_{-1}^{+1} \frac{(1-x^2)^i}{2^{m+n}\Pi(m)\Pi(n)} \frac{d^{m+i}(x^2-1)^m}{dx^{m+i}} \cdot \frac{d^{n+i}(x^2-1)^n}{dx^{n+i}} dx,$$

oder, falls $m \overline{\overline{<}} n$, nach $(m+i)$ maliger partieller Integration

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{(-1)^{m+i}}{2^{m+n}\Pi(m)\Pi(n)} \frac{d^{m+i}}{dx^{m+i}} \left[(1-x^2)^i \frac{d^{m+i}(x^2-1)^m}{dx^{m+i}}\right] \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{(-1)^m \Pi(m+i)\Pi(2m)}{2^{m+n}\Pi(m-i)\Pi(m)\Pi(n)} \frac{d^{n-m}(x^2-1)^n}{dx^{n-m}} dx,$$

da:

$$\frac{d^{m+i}}{dx^{m+i}}\left[(1-x^2)^i \frac{d^{m+i}(x^2-1)^m}{dx^{m+i}}\right]$$
$$= (-1)^i\, 2m\,(2m-1)\ldots(m-i+1)\,\Pi(m+i),$$
$$= (-1)^i\, \Pi(2m)\,\frac{\Pi(m+i)}{\Pi(m-i)}.$$

Vergleichen wir die so gefundene Formel mit der Formel 51) für das Integral:

$$\int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx,$$

so folgt:

$$67)\quad \int_{-1}^{+1} P_{mi}(x)\, P_{ni}(x)\, dx = \frac{\Pi(m+i)}{\Pi(m-i)} \int_{-1}^{+1} P_m(x)\, P_n(x)\, dx,$$

oder:

$$68)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{-1}^{+1} P_{mi}(x)\, P_{ni}(x)\, dx = 0, \quad m \neq n, \\ &\int_{-1}^{+1} P_{ni}^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\,\frac{\Pi(n+i)}{\Pi(n-i)}. \end{aligned} \right.$$

Zusatz zu IIb). Die zugeordneten Funktionen $P_{ni}(x)$ lassen sich in der Form darstellen:

$$P_{ni}(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})^i}{2^n\, \Pi(n)}\, \frac{d^{n+i}(x^2-1)^n}{dx^{n+i}}$$

und haben als Folge hiervon die Integraleigenschaften:

$$\int_{-1}^{+1} P_{mi}(x)\, P_{ni}(x)\, dx = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_{-1}^{+1} P_{ni}^2(x)\, dx = \frac{2}{2n+1}\,\frac{\Pi(n+i)}{\Pi(n-i)}.$$

3. Kapitel.

Die allgemeinen Kugelfunktionen $Y_n(\mu, \varphi)$.

§ 1.

Man definiert den Ausdruck:

$$69)\quad Y_n(\mu, \varphi) = A_{n0} P_{n0}(\mu) + \sum_{1}^{n}{}^{i} P_{ni}(\mu) \{A_{ni} \cos i\varphi + B_{ni} \sin i\varphi\},$$

in dem die $A_{n0} A_{n1} A_{n2} \ldots A_{nn} B_{n1} B_{n2} \ldots B_{nn}$ beliebige Konstanten sein können, als eine allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung von μ und φ. Jede Kugelfunktion nter Ordnung $Y_n(\mu, \varphi)$ enthält somit $(2n+1)$ willkürliche Konstanten, und erst eine bestimmte Wahl derselben macht $Y_n(\mu, \varphi)$ zu einer völlig bestimmten Funktion von μ und φ.

Da jedes $P_{ni}(\mu)$ der Differentialgleichung genügt:

$$\left[n(n+1) - \frac{i^2}{1-\mu^2}\right] P_{ni}(\mu) + \frac{d}{d\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{dP_{ni}(\mu)}{d\mu}\right] = 0,$$

erfüllt jeder Ausdruck:

$$\psi = \begin{cases} P_{ni}(\mu) \cos i\varphi, \\ P_{ni}(\mu) \sin i\varphi \end{cases}$$

die Differentialgleichung:

$$n(n+1)\psi + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial\psi}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2} = 0,$$

und da sich $Y_n(\mu, \varphi)$ aus Ausdrücken von der Form ψ additiv zusammensetzt, so muss $Y_n(\mu, \varphi)$ der Differentialgleichung genügen:

$$70)\quad n(n+1) Y_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} = 0,$$

welche als die Differentialgleichung der allgemeinen Kugelfunktionen $Y_n(\mu, \varphi)$ bezeichnet wird.

Wir erhalten den Satz:

III. Die allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung:

$$Y_n(\mu, \varphi) = A_{n0} P_{n0}(\mu) + \sum_{1}^{n}{}^{i} P_{ni}(\mu) \{A_{ni} \cos i\varphi + B_{ni} \sin i\varphi\}$$

genügt der Differentialgleichung:

$$n(n+1)\,Y_n + \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial Y_n}{\partial\mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 Y_n}{\partial\varphi^2} = 0.$$

§ 2.

Es sei nun:

$$71)\quad Y_n(\mu,\varphi) = A_{n0}P_{n0}(\mu) + \sum_1^n {}_i\, P_{ni}(\mu)\left\{A_{ni}\cos i\varphi + B_{ni}\sin i\varphi\right\}$$

irgend eine allgemeine Kugelfunktion n ter Ordnung,

$$72)\quad H_m(\mu,\varphi) = \mathcal{A}_{m0}P_{m0}(\mu) + \sum_1^m {}_i\, P_{mi}(\mu)\left\{\mathcal{A}_{mi}\cos i\varphi + \mathcal{B}_{mi}\sin i\varphi\right\}$$

irgend eine allgemeine Kugelfunktion mter Ordnung von μ und φ. Wir suchen das Integral:

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} H_m(\mu,\varphi)\,Y_n(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi$$

zu berechnen.

Es ist zunächst([27]) als eine Folge der Formeln:

$$73)\quad \begin{cases} \left.\begin{aligned} &\int_0^{2\pi}\cos j\varphi\cos s\varphi\,d\varphi = 0,\\ &\int_0^{2\pi}\sin j\varphi\sin s\varphi\,d\varphi = 0, \end{aligned}\right\} j \neq s \\ \int_0^{2\pi}\cos^2 j\varphi\,d\varphi = \begin{cases}2\pi, & j=0,\\ \pi, & j\neq 0,\end{cases} \\ \int_0^{2\pi}\sin^2 j\varphi\,d\varphi = \pi, \quad j\neq 0, \\ \int_0^{2\pi}\cos j\varphi\sin s\varphi\,d\varphi = 0: \end{cases}$$

$$74)\quad \int_0^{2\pi} H_m(\mu,\varphi)\,Y_n(\mu,\varphi)\,d\varphi = 2\pi\,A_{n0}\,\mathcal{A}_{n0}\,P_{n0}(\mu)\,P_{m0}(\mu)$$
$$+\pi\sum_1^m{}^i\,P_{ni}(\mu)\,P_{mi}(\mu)\left\{A_{ni}\,\mathcal{A}_{mi}+B_{ni}\,\mathcal{B}_{mi}\right\},\quad (m \lesseqgtr n).$$

Integriert man nochmals nach μ zwischen den Grenzen (-1) und $(+1)$, so folgt:

$$75)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Y_n(\mu,\varphi)\,H_m(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi = 0,\quad m \neq n, \\ \displaystyle\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Y_n(\mu,\varphi)\,H_n(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi \\ \displaystyle\quad = \frac{2\pi}{2n+1}\left\{2A_{n0}\,\mathcal{A}_{n0}+\sum_1^n{}^i\,\frac{\Pi(n+i)}{\Pi(n-i)}\left[A_{ni}\,\mathcal{A}_{ni}+B_{ni}\,\mathcal{B}_{ni}\right]\right\}, \end{cases}$$

mit Rücksicht auf den Zusatz zu II b).

Zusatz zu III. Sind:

$$Y_n(\mu,\varphi) = A_{n0}\,P_{n0}(\mu)+\sum_1^n{}^i\,P_{ni}(\mu)\left\{A_{ni}\cos i\varphi+B_{ni}\sin i\varphi\right\},$$

$$H_m(\mu,\varphi) = \mathcal{A}_{m0}\,P_{m0}(\mu)+\sum_1^m{}^i\,P_{mi}(\mu)\left\{\mathcal{A}_{mi}\cos i\varphi+\mathcal{B}_{mi}\sin i\varphi\right\}$$

zwei allgemeine Kugelfunktionen verschiedener Ordnung, so ist:

$$\int_{-1}^{+1}\int_0^{2\pi} Y_n(\mu,\varphi)\,H_m(\mu,\varphi)\,d\mu\,d\varphi = 0.$$

Sind:

$$Y_n(\mu,\varphi) = A_{n0}\,P_{n0}(\mu)+\sum_1^n{}^i\,P_{ni}(\mu)\left\{A_{ni}\cos i\varphi+B_{ni}\sin i\varphi\right\},$$

$$H_n(\mu,\varphi) = \mathcal{A}_{n0}\,P_{n0}(\mu)+\sum_1^n{}^i\,P_{ni}(\mu)\left\{\mathcal{A}_{ni}\cos i\varphi+\mathcal{B}_{ni}\sin i\varphi\right\}$$

zwei allgemeine Kugelfunktionen derselben Ordnung, so ist:

$$\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{2\pi} Y_n(\mu, \varphi)\, H_n(\mu, \varphi)\, d\mu\, d\varphi$$
$$= \frac{2\pi}{2n+1}\left\{2 A_{n0} \mathcal{A}_{n0} + \sum_{1}^{n}{}_i \frac{\Pi(n+i)}{\Pi(n-i)}\left[A_{ni}\mathcal{A}_{ni} + B_{ni}\mathcal{B}_{ni}\right]\right\}.$$

4. Kapitel.

Entwickelung von $\frac{1}{r}$ in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen von μ, φ fortschreitende Reihe und einige Folgerungen dieser Entwickelung.

§ 1.

Es sei, wie früher, $(\xi\eta\zeta)$ resp. $(R\theta\varphi)$ ein Punkt der Kugelfläche, (xyz) resp. $(r_1\theta_1\varphi_1)$ ein variabler Punkt aufserhalb der Kugel, γ der Winkel der Richtungen $(\theta\varphi)$ und $(\theta_1\varphi_1)$, so dass (S. 124) für die reciproke Entfernung der beiden Punkte die Entwickelung gilt:

$$76)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\sum_{0}^{\infty}{}_n P_n(\cos\gamma)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n,$$

wobei:

$$77)\quad \cos\gamma = \mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1),$$

wenn man noch:

$$78)\quad \begin{cases} \mu = \cos\theta, & \nu = \sin\theta, \\ \mu_1 = \cos\theta_1, & \nu_1 = \sin\theta_1 \end{cases}$$

setzt.

Es lässt sich nun:

$$P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\big)$$

für ganz beliebige Werte von μ, μ_1, die gar nicht zwischen den Grenzen (-1) und $(+1)$ zu liegen brauchen, in der Form darstellen:

$$\sum_{0}^{n}{}_i C_{ni} P_{ni}(\mu) P_{ni}(\mu_1) \cos i(\varphi - \varphi_1),$$

wo die C_{ni} Konstanten vorstellen.

Wir wollen dies beweisen und zugleich die Konstanten C_{ni} zu berechnen suchen.

Es ist zunächst, da P_n eine ganze rationale Funktion seines Argumentes ist:

$$P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\big) = F_{n0} + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1) F_{n1}$$
$$+ [\nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]^2 F_{n2} + \cdots + [\nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)]^n F_{nn},$$

wo $F_{n0} F_{n1} F_{n2} \ldots F_{nn}$ ganze rationale Funktionen von μ und μ_1 vorstellen. Da ferner für jedes beliebige ganze m: ([28])

$$\cos^m(\varphi - \varphi_1) = \alpha_0 \cos m(\varphi - \varphi_1) + \alpha_2 \cos(m-2)(\varphi - \varphi_1) + \cdots,$$

wo $\alpha_0\, \alpha_2 \ldots$ gewisse Zahlenfaktoren vorstellen, und alle geraden Potenzen von ν und ν_1 ganze rationale Funktionen von μ resp. μ_1 sind, können wir die obige Formel auch so schreiben:

$$P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\big) = f_{n0} + f_{n1}\nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)$$
$$+ f_{n2}\nu^2\nu_1^2 \cos 2(\varphi - \varphi_1) + \cdots + f_{nn}\nu^n\nu_1^n \cos n(\varphi - \varphi_1),$$

oder:

$$79)\quad P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\big) = \sum_0^n{}^i f_{ni}\nu^i\nu_1^i \cos i(\varphi - \varphi_1),$$

wo die f_{ni} ganze rationale Funktionen von μ und μ_1 sind, die überdies in bezug auf μ und μ_1 symmetrisch sein müssen.

Zur Berechnung der f_{ni} bedenken wir, dass für ganz beliebige x die Funktion $P_n(x)$ der Differentialgleichung genügt:

$$80)\quad n(n+1)P_n(x) - 2x\frac{dP_n(x)}{dx} + (1 - x^2)\frac{d^2P_n(x)}{dx^2} \equiv 0,$$

und als eine Folge hiervon ergiebt sich die Identität:

$$81)\quad n(n+1)P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1\cos(\varphi - \varphi_1)\big)$$
$$+ \frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1\cos(\varphi - \varphi_1)\big)}{\partial\mu}\right]$$
$$+ \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 P_n\big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1\cos(\varphi - \varphi_1)\big)}{\partial\varphi^2} \equiv 0,$$

denn diese Gleichung geht durch eine einfache Umformung ([29]) in die folgende über:

$$n(n+1)P_n\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)$$
$$-2\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)P_n'\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)$$
$$+\left[1-\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)^2\right]P_n''\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)=0,$$

die nach 80) identisch erfüllt ist.

Setzen wir in die Gleichung 81) den Wert 79) von

$$P_n\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)$$

ein, so folgt:

$$\sum_0^n{}_i\, \nu_1^{\,i}\cos(\varphi-\varphi_1)\left\{n(n+1)\nu^i f_{ni}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\nu^2\frac{\partial}{\partial\mu}(\nu^i f_{ni})\right]-i^2\nu^{i-2}f_{ni}\right\}=0,$$

und hieraus einzeln:

$$82)\quad n(n+1)\nu^i f_{ni}+\frac{\partial}{\partial\mu}\left[\nu^2\frac{\partial}{\partial\mu}(\nu^i f_{ni})\right]-i^2\nu^{i-2}f_{ni}=0.$$

Diese Gleichung geht durch eine einfache Umformung([30]) in die folgende über:

$$83)\quad (n-i)(n+i+1)f_{ni}-(2i+2)\mu\frac{\partial f_{ni}}{\partial\mu}+(1-\mu^2)\frac{\partial^2 f_{ni}}{\partial\mu^2}=0.$$

Nach Zusatz zu IIa) muss hiernach f_{ni} von der Form sein:

$$84)\quad f_{ni}=G_{ni}P_n^{(i)}(\mu),$$

wo G_{ni} von μ unabhängig ist, oder, da f_{ni} in bezug auf μ und μ_1 symmetrisch ist:

$$85)\quad f_{ni}=C_{ni}P_n^{(i)}(\mu)P_n^{(i)}(\mu_1),$$

wo die C_{ni} Konstanten vorstellen.

Wir erhalten aus 79) und 85) die Formel:

$$86)\quad P_n\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)$$
$$=\sum_0^n{}_i\, C_{ni}\nu^i\nu_1^{\,i}P_n^{(i)}(\mu)P_n^{(i)}(\mu_1)\cos i(\varphi-\varphi_1),$$

oder:

$$87)\quad P_n\left(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\right)=\sum_0^n{}_i\, C_{ni}P_{ni}(\mu)P_{ni}(\mu_1)\cos i(\varphi-\varphi_1),$$

wo die C_{ni} Zahlenfaktoren sind, die wir nunmehr berechnen wollen; die Formel 87) gilt für ganz beliebige Werte von μ und μ_1.

Wir setzen:

$$\mu = \mu_1,$$

und:

$$\nu = -\nu_1,$$

dann folgt aus 87):

$$P_n\{\mu^2 - (1-\mu^2)\cos(\varphi - \varphi_1)\} = \sum_0^n{}^i (-1)^i C_{ni} P_{ni}^2(\mu) \cos i(\varphi - \varphi_1).$$

Wir dividieren durch μ^{2n} und lassen μ unendlich wachsen, dann wird:

$$88)\quad \lim_{\mu=\infty} \frac{P_n\{\mu^2 - (1-\mu^2)\cos(\varphi-\varphi_1)\}}{\mu^{2n}} = \lim_{\mu=\infty} \sum_0^n{}^i (-1)^i C_{ni} \frac{P_{ni}^2(\mu)}{\mu^{2n}} \cos i(\varphi - \varphi_1).$$

Nun ist (man vergl. Formel 43)):

$$89)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} \dfrac{P_n\{\mu^2 - (1-\mu^2)\cos(\varphi-\varphi_1)\}}{\mu^{2n}} = \dfrac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2}[1+\cos(\varphi-\varphi_1)]^n, \\ = \left[\dfrac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2}\right]^2 \left\{1 + 2\sum\limits_1^n{}^i \dfrac{[\Pi(n)]^2}{\Pi(n-i)\,\Pi(n+i)} \cos i(\varphi-\varphi_1)\right\}, \end{cases}$$

da: [31]

$$90)\quad [1+\cos(\varphi-\varphi_1)]^n = \frac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2}\left\{1 + 2\sum_1^n{}^i \frac{[\Pi(n)]^2}{\Pi(n-i)\,\Pi(n+i)} \cos i(\varphi-\varphi_1)\right\}.$$

Andererseits ist (man vergleiche Formel 55)):

$$91)\quad \begin{cases} \lim\limits_{\mu=\infty} \dfrac{P_{ni}^2(\mu)}{\mu^{2n}} = \lim\limits_{\mu=\infty} \left[(-1)^i \dfrac{(P_n^{(i)}(\mu))^2}{\mu^{2n-2i}}\right], \\ = (-1)^i \left[\dfrac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)\,\Pi(n-i)}\right]^2; \end{cases}$$

machen wir die Substitutionen 89) und 91) in 88), so folgt, wenn wir den gemeinsamen Faktor:

$$\left[\frac{\Pi(2n)}{2^n\,\Pi(n)}\right]^2$$

fortlassen:

$$92)\quad \left[\frac{1}{\Pi(n)}\right]^2 \left\{1+2\sum_1^n{}_i \frac{[\Pi(n)]^2}{\Pi(n-i)\,\Pi(n+i)}\cos i(\varphi-\varphi_1)\right\} = \sum_0^n{}_i\, C_{ni}\,\frac{\cos i(\varphi-\varphi_1)}{[\Pi(n-i)]^2},$$

und hieraus einzeln:

$$93)\quad \begin{cases} C_{n0}=1, \\ C_{ni}=2\,\dfrac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}, \quad i \neq 0. \end{cases}$$

Damit haben wir die Koefficienten C_{ni} in der Formel 87) berechnet und können nun die Formeln 76), 77), 87), 93) in dem folgenden Satze zusammenfassen:

IVa) Bezeichnet γ den Winkel zweier Richtungen $(\theta\varphi)$ und $(\theta_1\varphi_1)$, so besteht die Formel:

$$94)\quad P_n(\cos\gamma)=\sum_0^n{}_i\, C_{ni}\,P_{ni}(\mu)\,P_{ni}(\mu_1)\cos i(\varphi-\varphi_1),$$

und die reciproke Entfernung eines Punktes $(R\theta\varphi)$ der Kugelfläche (R) von einem äusseren Punkte $(r_1\theta_1\varphi_1)$ lässt sich in der Form darstellen:

$$95)\quad \frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}\sum_0^\infty{}_n\sum_0^n{}_i\, C_{ni}\,P_{ni}(\mu)\,P_{ni}(\mu_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n\cos i(\varphi-\varphi_1), \quad (R<r_1).$$

Dabei ist:

$$\mu=\cos\theta,$$
$$\mu_1=\cos\theta_1$$

und:

$$C_{n0}=1,$$
$$C_{ni}=2\,\frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}, \quad i\neq 0$$

zu setzen.

Zusatz 1 zu IVa). Ist $(r_1 \theta_1 \varphi_1)$ ein Punkt innerhalb der Kugel (R), so lautet die Formel 95):

$$96)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_0^{\infty}{}^{n}\sum_0^{n}{}^{i}\, C_{ni}\, P_{ni}(\mu)\, P_{ni}(\mu_1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n \cos i(\varphi - \varphi_1),\quad (r_1 < R).$$

Zusatz 2 zu IVa). Die Formeln 94), 95), 96) lassen sich in der Form schreiben:

$$97)\quad P_n(\cos\gamma) = Y_n(\mu, \varphi),$$

$$98)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{r_1}\sum_0^{\infty}{}^{n}\, Y_n(\mu, \varphi)\left(\frac{R}{r_1}\right)^n,\quad (R < r_1)$$

$$99)\quad \frac{1}{r} = \frac{1}{R}\sum_0^{\infty}{}^{n}\, Y_n(\mu, \varphi)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,\quad (r_1 < R);$$

dabei ist $Y_n(\mu, \varphi)$ eine allgemeine Kugelfunktion n ter Ordnung von μ und φ:

$$100)\quad Y_n(\mu, \varphi) = A_{n0} P_{n0}(\mu) + \sum_1^{n}{}^{i}\, P_{ni}(\mu)\left\{A_{ni}\cos i\varphi + B_{ni}\sin i\varphi\right\},$$

in der:

$$101)\quad \begin{cases} A_{n0} = P_{n0}(\mu_1), \\ A_{ni} = 2\,\dfrac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}\, P_{ni}(\mu_1)\cos i\varphi_1, \\ B_{ni} = 2\,\dfrac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}\, P_{ni}(\mu_1)\sin i\varphi_1 \end{cases}$$

zu setzen ist.

Zusatz 3 zu IVa). Bezeichnet man mit ν die innere Normale der Kugel im Punkte $(\xi\eta\zeta)$ resp. $(R\theta\varphi)$, mit r die Entfernung und Richtung von $(\xi\eta\zeta)$ nach einem äufseren Punkte $(r_1 \theta_1 \varphi_1)$, so ist:

$$102)\quad \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \equiv -\frac{\partial\frac{1}{r}}{\partial R} = -\frac{1}{r_1^2}\sum_0^{\infty}{}^{n}\, n\, Y_n(\mu, \varphi)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n-1},\quad (R < r_1).$$

Bezeichnet r die Entfernung und Richtung von $(\xi\eta\zeta)$ nach einem inneren Punkte $(r_1 \theta_1 \varphi_1)$, so ist:

$$103)\quad \frac{\cos(r\nu)}{r^2} = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = \frac{1}{R^2}\sum_0^\infty n\,(n+1)\,Y_n(\mu,\varphi)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n, \quad (r_1 < R).$$

In beiden Fällen sind die $Y_n(\mu, \varphi)$ durch die Formeln 100), 101) definiert.

Die Formeln 98) bis 103) lösen die Aufgabe, die Ausdrücke:

$$\frac{1}{r} \text{ und } \frac{\cos(r\nu)}{r^2}$$

in Reihen zu entwickeln, welche nach allgemeinen Kugelfunktionen von μ, φ fortschreiten.

§ 2.

Die aus dem Zusatz 2 zu IVa) hervorgehende Eigenschaft von $P_n(\cos\gamma)$ als einer allgemeinen Kugelfunktion $Y_n(\mu, \varphi)$ liefert uns in Verbindung mit dem Zusatz zu III eine wichtige Formel für das Integral:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_m(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi,$$

in dem $H_m(\mu, \varphi)$ irgend eine allgemeine Kugelfunktion mter Ordnung von μ, φ ist.

Es folgt zunächst:

$$104)\quad \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_m(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi = 0, \quad m \neq n,$$

falls die Ordnungen m und n der Funktionen H_m und $P_n(\cos\gamma)$ verschieden sind. Andererseits folgt, wenn die Ordnung der beiden Funktionen dieselbe ist, also für eine Funktion:

$$105)\quad H_n(\mu,\varphi) = A_{n0}\, P_{n0}(\mu) + \sum_1^n {}_i\, P_{ni}(\mu)\left\{A_{ni}\cos i\varphi + B_{ni}\sin i\varphi\right\}$$

die Formel:

$$106) \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_n(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi$$
$$= \frac{2\pi}{2n+1}\left\{2 A_{n0}\, \mathcal{A}_{n0} + \sum_1^n i\, \frac{\Pi(n+i)}{\Pi(n-i)}\left[A_{ni}\mathcal{A}_{ni} + B_{ni}\mathcal{B}_{ni}\right]\right\},$$

wobei für die

$$A_{n0}\, A_{n1} \ldots A_{nn}\, B_{n1} \ldots B_{nn}$$

die Werte 101) einzusetzen sind. Thun wir dies, so lautet 106):

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_n(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi$$
$$= \frac{4\pi}{2n+1}\left\{\mathcal{A}_{n0} P_{n0}(\mu_1) + \sum_1^n i\, P_{ni}(\mu_1)\left\{\mathcal{A}_{ni}\cos i\varphi_1 + \mathcal{B}_{ni}\sin i\varphi_1\right\}\right\}$$

oder:

$$107) \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_n(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} H_n(\mu_1,\varphi_1).$$

IVb) Versteht man unter γ den Winkel zweier Richtungen*) (μ, φ) und (μ_1, φ_1) und unter $H_m(\mu, \varphi)$ irgend eine allgemeine Kugelfunktion mter Ordnung von μ und φ, so bestehen die Formeln:

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_m(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi = 0, \quad m \neq n,$$

$$\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} P_n(\cos\gamma)\, H_n(\mu,\varphi)\, d\mu\, d\varphi = \frac{4\pi}{2n+1} H_n(\mu_1,\varphi_1).$$

*) Diese abgekürzte Schreibweise dürfte wohl keinen Zweifel zulassen.

§ 3.

Dieses Resultat gestattet uns bereits, in besonderen Fällen die Integrale:

$$V=\int\limits_{(R)}\frac{H\,d\omega}{r},$$

$$W=\int\limits_{(R)}\varkappa\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

zu berechnen, nämlich, falls H oder $\varkappa$ sich als Kugelfunktionen $H_m(\mu,\varphi)$ darstellen. Sei zunächst:

$$108)\quad H=H_m(\mu,\varphi),$$

dann wird (nach 11)):

$$V=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\pi}R^2\,H_m(\mu,\varphi)\,\frac{1}{r}\sin\theta\,d\theta\,d\varphi,$$

oder, da sich die symbolische Formel 11) auch so schreiben lässt:

$$109)\quad \int\limits_{(R)}(\text{—})\,d\omega=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}R^2\,(\text{——})\,d\mu\,d\varphi,$$

auch:

$$110)\quad V=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}\frac{R^2\,H_m(\mu,\varphi)}{r}\,d\mu\,d\varphi.$$

Setzt man hierin für $\frac{1}{r}$ den Wert:

$$\frac{1}{r}=\frac{1}{r_1}\sum_0^{\infty}{}^{n}\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n}P_n(\cos\gamma),\quad (R<r_1)$$

ein, so erhält man für äufsere Punkte $(r_1\,\theta_1\,\varphi_1)$:

$$V=\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1}R\,H_m(\mu,\varphi)\sum_0^{\infty}{}^{n}P_n(\cos\gamma)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1}d\mu\,d\varphi,$$

oder nach IVb):

$$111)\quad V = \frac{4\pi R}{2m+1} H_m(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{m+1}, \quad (R < r_1),$$

für innere Punkte $(r_1 \theta_1 \varphi_1)$ ist in 110):

$$\frac{1}{r} = \frac{1}{R} \sum_0^\infty {}_n \left(\frac{r_1}{R}\right)^n P_n(\cos\gamma), \quad (r_1 < R),$$

einzusetzen, und es wird:

$$V = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} R\, H_m(\mu, \varphi) \sum_0^\infty {}_n P_n(\cos\gamma) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n d\mu\, d\varphi,$$

oder nach IVb):

$$112)\quad V = \frac{4\pi R}{2m+1} H_m(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^m.$$

Zusatz 1 zu IVb). Das Flächenpotential

$$V = \int_{(R)} H \frac{d\omega}{r}$$

einer Kugelfläche (R) hat im besonderen, wenn sich H als eine allgemeine Kugelfunktion beliebiger Ordnung:

$$H = H_n(\mu, \varphi)$$

darstellt, die Werte:

$$V_a = \frac{4\pi R}{2n+1} H_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} \text{ für äußere Punkte } (r_1 \theta_1 \varphi_1),$$

$$V_i = \frac{4\pi R}{2n+1} H_n(\mu_1 \varphi_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n \text{ für innere Punkte } (r_1 \theta_1 \varphi_1).$$

Es sei nun in dem Integrale W:

$$113)\quad \varkappa = H_m(\mu, \varphi),$$

dann wird (nach 109):

$$114)\quad W = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} R^2 H_m(\mu, \varphi) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\mu\, d\varphi.$$

Setzt man hierin für $\frac{\cos(r\nu)}{r^2}$ den Wert:

$$\frac{\cos(r\nu)}{r^2} \equiv -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = -\frac{1}{r_1^2}\sum_0^\infty n \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n-1} P_n(\cos\gamma), \ (R < r_1),$$

so erhält man für äufsere Punkte $(r_1 \vartheta_1 \varphi_1)$:

$$W = -\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} H_m(\mu, \varphi) \sum_0^\infty n \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} P_n(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi,$$

oder nach IVb):

$$115)\quad W = -\frac{4\pi m}{2m+1} H_m(\mu_1, \varphi_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{m+1}, \ (R < r_1).$$

Für innere Punkte $(r_1 \vartheta_1 \varphi_1)$ ist in 114):

$$\frac{\cos(r\nu)}{r^2} \equiv -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial R} = \frac{1}{R^2}\sum_0^\infty (n+1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n P_n(\cos\gamma), \ (r_1 < R),$$

einzusetzen, und es wird:

$$W = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} H_m(\mu, \varphi) \sum_0^\infty (n+1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n P_n(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi,$$

oder nach IVb):

$$116)\quad W = +4\pi \frac{m+1}{2m+1} H_m(\mu_1, \varphi_1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^m, \ (r_1 < R).$$

Zusatz 2 zu IVb). Das Flächenintegral:

$$W = \int_{(R)} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

einer Kugelfläche (R) hat im besonderen, wenn sich $\varkappa$ als eine allgemeine Kugelfunktion beliebiger Ordnung:

$$\varkappa = H_n(\mu, \varphi)$$

darstellt, die Werte:

$$W_a = -4\pi \frac{n}{2n+1} H_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} \text{für äufsere Punkte } (r_1\, \theta_1\, \varphi_1),$$

$$W_i = 4\pi \frac{n+1}{2n+1} H_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^{n} \text{für innere Punkte } (r_1\, \theta_1\, \varphi_1).$$

Ganz besonders einfache Werte erhalten V und W, wenn H und $\varkappa$ sich auf Kugelfunktionen nullter Ordnung, also auf Konstanten:

$$117) \begin{cases} H = H_0, \\ \varkappa = \varkappa_0 \end{cases}$$

reduzieren. In diesem Falle wird:

$$118) \begin{cases} V_a = \dfrac{4\pi R^2}{r_1} H_0, \\ V_i = 4\pi R H_0; \end{cases}$$

$$119) \begin{cases} W_a = 0, \\ W_i = 4\pi \varkappa_0. \end{cases}$$

Die Formeln 119) waren bereits nach Satz IIIa) und IIIb) des ersten Teiles zu erwarten.

II. Abschnitt.

Über die allgemeine Entwickelung von Funktionen der Stelle auf der Kugelfläche in Reihen, die nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreiten.

---

1. Kapitel.

Zwei Hilfssätze.

§ 1.

Es seien F(x) und Φ(x) zwei Funktionen von x, die im Intervall

$$x_1 < x < x_2$$

abteilungsweise stetig sind, und man wisse von der Funktion F(x), dass sie von x_1 bis x_2 entweder fortdauernd wächst oder fortdauernd abnimmt.

Fig. 49.

Wir teilen das Intervall $x_1 x_2$ in n Teile:

$$x_1 a_1 ; \; a_1 a_2 ; \; \ldots ; \; a_{n-1} x_2 ,$$

und zwar mögen die Trennungspunkte von Strecken, auf denen F und Φ stetig sind, zu den Teilpunkten $a_1 a_2 \ldots a_{n-1}$ gehören, $b_1 b_2 \ldots b_n$ seien irgend welche Punkte dieser n Teilintervalle, dann ist nach seiner Definition:

$$120) \quad \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\Phi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}_j\, F(b_j)\,\Phi(b_j)\,(a_j - a_{j-1}),$$

wenn wir noch:

$$a_0 = x_1 ; \quad a_n = x_2$$

setzen.

Die Formel 120) können wir auch so schreiben: (32)

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\Phi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}_j\, F(b_j) \int_{a_{j-1}}^{a_j} \Phi(x)\,dx,$$

oder auch so:

$$121) \quad \int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\Phi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}_j\, F(b_j) \left[\int_{a_{j-1}}^{x_2} \Phi(x)\,dx - \int_{a_j}^{x_2} \Phi(x)\,dx \right].$$

Nun ist:

$$-\lim_{n=\infty} \sum_1^n {}_j\, F(b_j) \int_{a_j}^{x_2} \Phi(x)\,dx \equiv F(x_1) \int_{x_1}^{x_2} \Phi\,dx - \lim_{n=\infty} \sum_0^n {}_j\, F(b_j) \int_{a_j}^{x_2} \Phi(x)\,dx,$$

$$\equiv F(x_1) \int_{x_1}^{x_2} \Phi\,dx - \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}_j\, F(b_{j-1}) \int_{a_{j-1}}^{x_2} \Phi(x)\,dx,$$

wenn wir noch:

$$b_0 = x_1$$

setzen. Die Gleichung 121) geht so in die folgende über:

$$122) \quad \int_{x_1}^{x_2} [F(x) - F(x_1)]\,\Phi(x)\,dx = \lim_{n=\infty} \sum_1^n {}_j\, [F(b_j) - F(b_{j-1})] \int_{a_{j-1}}^{x_2} \Phi(x)\,dx.$$

Wir bedenken nun, dass F von x_1 bis x_2 entweder fortdauernd wächst oder von x_1 bis x_2 fortdauernd abnimmt, so dass in beiden Fällen alle:

$$F(b_j) - F(b_{j-1})$$

dasselbe Vorzeichen haben. Es wird somit nach 122):[33]

$$123)\quad \int_{x_1}^{x_2} [F(x) - F(x_1)]\, \Phi(x)\, dx = M \cdot \lim_{n=\infty} \sum_1^n j\, [F(b_j) - F(b_{j-1})],$$

wenn M einen Mittelwert der Integrale:

$$\int_{a_{j-1}}^{x_2} \Phi(x)\, dx, \quad j = 1, 2 \ldots n$$

vorstellt und als solcher von der Form sein muss:[33]

$$124)\quad M = \int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\, dx, \quad x_1 \overline{\overline{<}} \varrho \overline{\overline{<}} x_2.$$

Die Formel 123) erhält so die Gestalt:

$$\int_{x_1}^{x_2} [F(x) - F(x_1)]\, \Phi(x)\, dx = [F(x_2) - F(x_1)] \int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\, dx, \quad (x_1 \overline{\overline{<}} \varrho \overline{\overline{<}} x_2)$$

oder:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\, \Phi(x)\, dx = F(x_2) \int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\, dx + F(x_1) \left[\int_{x_1}^{x_2} \Phi(x)\, dx - \int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\, dx \right],$$

oder schliefslich:

$$125)\quad \int_{x_1}^{x_2} F(x)\, \Phi(x)\, dx = F(x_1) \int_{x_1}^{\varrho} \Phi(x)\, dx + F(x_2) \int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\, dx, \quad (x_1 \overline{\overline{<}} \varrho \overline{\overline{<}} x_2).$$

Hilfssatz 1. (Mittelwertsatz von Du Bois-Reymond).

Bezeichnen $F(x)$ und $\Phi(x)$ zwei Funktionen von x, die in dem Intervalle

$$x_1 \leqq x \leqq x_2$$

abteilungsweise eindeutig und stetig sind, und wissen wir ferner, dass die Funktion F von x_1 bis x_2 entweder fortdauernd wächst oder fortdauernd abnimmt, so gilt die Formel:

$$\int_{x_1}^{x_2} F(x)\,\Phi(x)\,dx = F(x_1)\int_{x_1}^{\varrho} \Phi(x)\,dx + F(x_2)\int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\,dx,$$

wo ϱ einen zwischen x_1 und x_2 liegenden Wert von x vorstellt.

§ 2.

Wir hatten früher die Formel erhalten (Formeln 87), 93)):

$$126)\quad P_n(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu_1{}^2}\cos\varphi) = P_n(\mu)\,P_n(\mu_1) + \sum_1^n{}_j \frac{\Pi(n-j)}{\Pi(n+j)}\,2P_{nj}(\mu)\,P_{nj}(\mu_1)\cos j\varphi,$$

wenn wir nur in der früheren Untersuchung $\varphi_1 = 0$ setzen, und zwar haben wir diese Formel für ganz beliebige Werte von μ und μ_1 abgeleitet.

Wir integrieren diese Formel nach φ zwischen den Grenzen o und 2π, dann folgt:

$$\int_0^{2\pi} P_n(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu_1{}^2}\cos\varphi)\,d\varphi = 2\pi\,P_n(\mu)\,P_n(\mu_1);$$

wir dividieren noch durch $\mu_1{}^n$ und lassen μ_1 unendlich wachsen, dann ergiebt sich, da:

$$\lim_{\mu_1=\infty} \frac{P_n(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1{}^2}\cos\varphi)}{\mu_1{}^n} = \frac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2}(\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)^n, \text{*)}$$

$$\lim_{\mu_1=\infty} \frac{P_n(\mu_1)}{\mu_1{}^n} = \frac{\Pi(2n)}{2^n[\Pi(n)]^2},$$

aus der letzten Formel:

$$\int_0^{2\pi} (\mu + i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)^n\, d\varphi = 2\pi\, P_n(\mu),$$

oder:

$$127)\quad P_n(\mu) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)^n\, d\varphi. \text{**)}$$

Da nun der reelle Teil von

$$(\mu \pm i\sqrt{1-\mu^2}\cos\varphi)^n$$

seinem absoluten Werte nach

$$\overline{\overline{<}}\, (\sqrt{\mu^2 + (1-\mu^2)\cos^2\varphi})^n, \quad (-1 \,\overline{\overline{<}}\, \mu \,\overline{\overline{<}} +1),$$

so folgt:

$$128)\quad \text{abs. } P_n(\mu) \,\overline{\overline{<}}\, \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (\sqrt{\mu^2 + (1-\mu^2)\cos^2\varphi})^n\, d\varphi, \quad (-1 \,\overline{\overline{<}}\, \mu \,\overline{\overline{<}} +1),$$

---

*) Unter i verstehen wir hier die imaginäre Einheit.

**) Diese Formel eignet sich in vielen Fällen zu sehr einfachen Ableitungen der Eigenschaften der Funktionen $P_n(x)$. Um ein Beispiel anzuführen: Es folgt aus 127) ohne weiteres:

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x),$$

also auch:

$$P_n(-1) = (-1)^n P_n(1)$$

oder:

$$P_n(-1) = (-1)^n,$$

Formeln, die man natürlich auch aus den früheren Untersuchungen ableiten kann.

oder auch, da das nach φ zu nehmende Integral für alle 4 Quadranten gleich ist:

$$129)\quad \text{abs. } P_n(\mu) \overline{\overline{<}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\mu^2 + (1-\mu^2)\cos^2\varphi})^n\, d\varphi,$$

$$(-1 \overline{\overline{<}} \mu \overline{\overline{<}} +1).$$

Wir teilen das Integrationsintervall o bis $\frac{\pi}{2}$ in zwei Teile:

von o bis ε $\quad (\varepsilon \neq 0)$,

und von ε bis $\frac{\pi}{2}$,

dann ist im ersten Intervall:

$$\cos^2\varphi \overline{\overline{<}} 1,$$

im zweiten:

$$\cos^2\varphi \overline{\overline{<}} \cos^2\varepsilon,$$

und es folgt aus 129):

$$\text{abs. } P_n(\mu) \overline{\overline{<}} \frac{2}{\pi}\int_0^{\varepsilon} (\sqrt{\mu^2 + (1-\mu^2)})\, d\varphi$$

$$+\frac{2}{\pi}\int_{\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} (\sqrt{\mu^2 + (1-\mu^2)\cos^2\varepsilon})^n\, d\varphi,$$

oder:

$$130)\quad \text{abs. } P_n(\mu) \overline{\overline{<}} \frac{2}{\pi}\varepsilon + \frac{2}{\pi}\left(\frac{\pi}{2} - \varepsilon\right)(\sqrt{\mu^2 + (1-\mu^2)\cos^2\varepsilon})^n.$$

Da nun, wie klein wir auch ε machen mögen,

$$\mu^2 + (1-\mu^2)\cos^2\varepsilon < 1, \ (\mu^2 < 1),$$

so folgt aus 130), dass wir durch Vergröfserung von n und Verkleinerung von ε $P_n(\mu)$ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken können, wenn nur μ^2 wirklich kleiner als 1 ist, im übrigen aber beliebig nahe an diese obere Grenze heranrücken darf.

Hilfssatz 2. Die Funktion

$$P_n(\mu)$$

kann durch Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden, falls nur μ in strenger Weise der Ungleichung genügt:

$$\mu^2 < 1,$$

wobei es aber seiner oberen Grenze (+1) und seiner unteren Grenze (−1) beliebig nahe rücken darf.

2. Kapitel.

Die Laplacesche Entwickelung nach allgemeinen Kugelfunktionen.

§ 1.

Wenn wir wissen, dass sich eine Funktion auf der Kugelfläche:

$$f(\theta, \varphi)$$

in der Form darstellen lässt:

$$131)\quad f(\theta, \varphi) = \sum_0^\infty H_n(\mu, \varphi),$$

wo die $H_n(\mu, \varphi)$ allgemeine Kugelfunktionen von μ, φ vorstellen und eine konvergente Reihe bilden, so gestattet uns der Satz IVb), die $H_n(\mu, \varphi)$ als bestimmte Integrale darzustellen.

Es sei nämlich (μ_1, φ_1) irgend ein Punkt der Kugelfläche und γ der Winkel, den die Richtungen (μ, φ) und (μ_1, φ_1) einschliefsen, so dass:

$$132)\quad \cos\gamma = \mu\,\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu_1{}^2}\cos(\varphi - \varphi_1);$$

wir multiplizieren die Gleichung 131) mit

$$P_m(\cos\gamma)\,d\mu\,d\varphi, \quad m = 0, 1, 2 \ldots$$

und integrieren nach μ zwischen den Grenzen (−1) und (+1) und nach φ zwischen den Grenzen o und 2π, wobei wir von

vornherein annehmen wollen, dass $f(\theta, \varphi)$ auf der Kugelfläche abteilungsweise eindeutig und stetig ist, dann folgt mit Hilfe von IV b):

$$133)\quad \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi)\, P_m(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi = \frac{4\pi}{2m+1} H_m(\mu_1, \varphi_1),$$

$$m = 0, 1, 2 \ldots$$

Man kann somit 131) auch so schreiben:

$$134)\quad f(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{0}^{\infty}{}_{n} \frac{2n+1}{4\pi} \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi)\, P_n(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi,$$

oder auch:

$$135)\quad f(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi) \sum_{0}^{\infty}{}_{n} (2n+1)\, P_n(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi.$$

Diese Entwickelung, welche als die Laplacesche Entwickelung nach allgemeinen Kugelfunktionen bezeichnet wird, hatte zur Voraussetzung, dass die Integrale:

$$\frac{2n+1}{4\pi} \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi)\, P_n(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi$$

eine konvergente Reihe bilden, und es erhebt sich die Frage, ob diese Bedingung nicht für jede Funktion $f(\theta, \varphi)$, welche auf der Kugelfläche abteilungsweise eindeutig und stetig ist, von selbst erfüllt ist, so dass die Entwickelung 135) nach allgemeinen Kugelfunktionen (34) allgemeine Gültigkeit hat.

Dies soll im Folgenden näher untersucht werden.

§ 2.

Wir wollen zusehen, ob die Summe:

$$136)\quad \Sigma_n = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{0}^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi) \sum_{0}^{n}{}_{j} (2j+1)\, P_j(\cos\gamma)\, d\mu\, d\varphi$$

einem bestimmten Grenzwert mit wachsendem n zustrebt, und, wenn dies der Fall ist, diesen Grenzwert berechnen.

Wir führen zunächst ein neues Koordinatensystem $(x'y'z')$ ein, indem wir die positive x' Axe vom Centrum der Kugel nach dem Punkte $(\mu_1 \varphi_1)$ hinlaufen lassen. Die Polarkoordinaten eines Punktes $(\mu \varphi)$ seien in dem neuen System $\mu' \varphi'$, dann wird:

$$137)\quad \cos\gamma = \mu', \quad f(\theta, \varphi) = F(\mu', \varphi')$$

und:

$$138)\quad \Sigma_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} F(\mu', \varphi') \sum_0^n{}^j (2j+1)\, P_j(\mu')\, d\mu' d\varphi'.$$

Nun ist nach Zusatz 2 zu IIa):

$$\sum_0^n{}^j (2j+1)\, P_j(\mu') = P_n'(\mu') + P'_{n+1}(\mu'),$$

somit:

$$139)\quad \Sigma_n = \Psi_n + \Psi_{n+1},$$

wo:

$$140a)\quad \Psi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} F(\mu', \varphi')\, P_n'(\mu')\, d\mu' d\varphi',$$

$$140b)\quad \Psi_{n+1} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} F(\mu', \varphi')\, P'_{n+1}(\mu')\, d\mu' d\varphi'.$$

§ 3.

Wir wollen zunächst von der Funktion f nicht bloſs annehmen, dass sie auf der ganzen Kugelfläche eindeutig und stetig ist, sondern auch, dass sie auf jedem Hauptkreise abteilungsweise monoton ist, d. h. sie auf jedem Hauptkreise eine endliche Anzahl Maxima und Minima besitzt.

Wir können dann für jeden Meridian φ' das Integral:

$$141)\quad J_n = \int_{-1}^{+1} F(\mu', \varphi')\, P_n'(\mu')\, d\mu'$$

in folgender Weise umformen:

Wir zerlegen das Intervall (-1) bis $(+1)$ in eine endliche Anzahl $(N+2)$ Teilintervalle:

$$\begin{array}{ccc} -1 & \text{bis} & -1+\varepsilon, \\ -1+\varepsilon & „ & a_1, \\ a_1 & „ & a_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot \\ a_{N-1} & „ & 1-\varepsilon, \\ 1-\varepsilon & „ & 1, \end{array}$$

so, dass in jedem Teilintervalle F fortdauernd wachsend oder fortdauernd abnehmend ist, dann folgt:

$$142)\quad \left\{ \begin{aligned} J_n = & \int_{-1}^{-1+\varepsilon} F(\mu', \varphi')\, P_n'(\mu')\, d\mu' \\ & + \int_{1-\varepsilon}^{1} F(\mu', \varphi')\, P_n'(\mu')\, d\mu' \\ & + \sum_1^N {}^j \int_{a_{j-1}}^{a_j} F(\mu', \varphi')\, P_n'(\mu')\, d\mu', \end{aligned} \right.$$

wenn wir noch:

$$a_0 = -1+\varepsilon,\ a_N = 1-\varepsilon$$

setzen.

Auf jedes der Integrale rechts können wir den Hilfssatz 1 anwenden, und wir erhalten:

$$\begin{aligned} J_n = & F(-1, \varphi')[P_n(\varrho_0) - P_n(-1)] + F(-1+\varepsilon, \varphi')[P_n(-1+\varepsilon) - P_n(\varrho_0)] \\ & + F(1-\varepsilon, \varphi')[P_n(\varrho_{N+1}) - P_n(1-\varepsilon)] + F(1, \varphi')[P_n(1) - P_n(\varrho_{N+1})] \\ & + \sum_1^N {}^j [F(a_{j-1}, \varphi')[P_n(\varrho_N) - P_n(a_{j-1})] + F(a_j, \varphi')[P_n(a_j) - P_n(\varrho_N)]. \end{aligned}$$

wobei:

$$\begin{array}{rcl} -1 < \varrho_0 & \overline{\overline{<}} & -1+\varepsilon, \\ -1+\varepsilon \overline{\overline{<}} \varrho_1 & \overline{\overline{<}} & a_1 \quad , \\ a_1 \overline{\overline{<}} \varrho_2 & \overline{\overline{<}} & a_2 \quad , \\ \dots & & \dots \\ a_{N-1} \overline{\overline{<}} \varrho_N & \overline{\overline{<}} & 1-\varepsilon, \\ 1-\varepsilon \overline{\overline{<}} \varrho_{N+1} & \overline{\overline{<}} & 1 \quad . \end{array}$$

Da man nach dem Hilfssatz 2 jedes P_n in allen Intervallen, mit Ausnahme des ersten und letzten unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad durch Vergrößerung von n herabdrücken kann, wie klein man im übrigen ε wählen mag, so können wir die Formel für J_n auch so schreiben.

$$143) \left\{ \begin{array}{l} J_n = F(1, \varphi') P_n(1) + [F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')] P_n(\varrho_{N+1}) \\ \quad - F(-1, \varphi') P_n(-1) + [F(-1, \varphi') - F(-1+\varepsilon, \varphi')] P_n(\varrho_0) \\ \quad + \delta_{\varepsilon, n}, \end{array} \right.$$

wo $\delta_{\varepsilon,n}$ durch Vergrößerung von n unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, wie klein man im übrigen auch ε wählen mag.

Bedenkt man noch, dass:

$$\text{abs. } P_n(\varrho_{N+1}) \overline{\overline{<}} 1,$$
$$\text{abs. } P_n(\varrho_0) \quad \overline{\overline{<}} 1,$$

ferner wegen der Stetigkeit von F die Differenzen:

$$F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')$$

und:

$$F(-1, \varphi') - F(-1+\varepsilon, \varphi')$$

durch Verkleinerung von ε unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können, dass schliefslich:

$$P_n(1) = 1,$$
$$P_n(-1) = (-1)^n, {}^{*})$$
$$(^{35})\ F(1, \varphi') = f(\theta_1, \varphi_1),$$
$$F(-1, \varphi') = f(\pi - \theta_1, \pi + \varphi_1),$$

---

*) Man vgl. Anm. 2, S. 152.

so folgt aus 143):

$$144)\quad J_n = f(\theta_1, \varphi_1) + (-1)^n f(\pi - \theta_1, \pi + \varphi_1) + \Delta_{\varepsilon, n},$$

wo $\Delta_{\varepsilon, n}$ durch Verkleinerung von ε und nachher durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Es wird weiter:

$$145)\quad \Psi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} J_n\, d\varphi' = \frac{1}{2}[f(\theta_1, \varphi_1) + (-1)^n f(\pi - \theta_1, \pi + \varphi_1)] + D_{\varepsilon, n},$$

wo $D_{\varepsilon, n}$ durch Verkleinerung von ε und nachher durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Es ist analog:

$$146)\quad \Psi_{n+1} = \frac{1}{2}[f(\theta_1, \varphi_1) + (-1)^{n+1} f(\pi - \theta_1, \pi + \varphi_1)] + D_{\varepsilon, n+1},$$

und somit:

$$147)\quad \Sigma_n = f(\theta_1, \varphi_1) + D_n,$$

wo D_n durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Die Formel 147) liefert uns das Resultat:

$$148)\quad \lim_{n=\infty} \Sigma_n = f(\theta_1, \varphi_1),$$

das wir in folgender Weise aussprechen können:

Va) Die Laplacesche Entwickelung:

$$f(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi) \sum_0^{\infty}{}^n (2n + 1) P_n \Big(\cos\theta \cos\theta_1 + \sin\theta \sin\theta_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)\, d\mu\, d\varphi, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq \theta_1 \leqq \pi \\ 0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi, \end{pmatrix}$$

gilt für jede Funktion $f(\theta, \varphi)$, welche auf der Kugelfläche überall eindeutig und stetig und auf jedem Hauptkreise abteilungsweise monoton ist.

Aus den Formeln 139), 140) folgt durch eine der Untersuchung dieses Paragraphen analoge[36] Betrachtung der

Zusatz zu Va). Die Bedingung der Monotonität kann in Va) fortfallen, falls alle ersten Ableitungen von f nach ξ, η, ζ endlich sind.

§ 4.

Das vorstehende Resultat lässt sich ohne Schwierigkeit auf den Fall ausdehnen, dass die Funktion $f(\theta, \varphi)$ auf der Kugelfläche nur abteilungsweise stetig ist, wenn nur die Voraussetzung erfüllt bleibt, dass sie auf jedem Hauptkreise abteilungsweise monoton ist. Der Beweis des § 3 bleibt unverändert bis einschliefslich der Formel 143), wenn wir nur die Intervalle $a_{j-1}\, a_j$ so wählen, dass in denselben die Funktion

$$f(\theta, \varphi) \equiv F(\mu', \varphi')$$

eindeutig und stetig ist.

Es folgt nun aus 143):

$$149)\quad \left\{\begin{aligned} \varphi_n \equiv \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} J_n\, d\varphi' = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^n \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi' \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')]\, P_n(\varrho_{N+1})\, d\varphi' \\ + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} [F(-1, \varphi') - F(-1+\varepsilon, \varphi')]\, P_n(\varrho_0)\, d\varphi' \\ + \Delta_{\varepsilon, n}, \end{aligned}\right.$$

wo $\Delta_{\varepsilon, n}$ durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, wie klein man auch ε machen mag.

Die Integrale

$$\int_0^{2\pi} [F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')]\, P_n(\varrho_{N+1})\, d\varphi'$$

und:

$$\int_0^{2\pi} [F(-1, \varphi') - F(-1+\varepsilon, \varphi')]\, P_n(\varrho_0)\, d\varphi'$$

können, da

$$\text{abs. } P_n(\varrho_{N+1}) \leqq 1,$$
$$\text{abs. } P_n(\varrho_0) \leqq 1$$

ist, durch Verkleinerung von ε auch dann unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden, wenn die Punkte

$$\mu' = +1 \text{ und } \mu' = -1$$

auf Trennungskurven von Flächenteilen liegen, auf denen F eindeutig und stetig ist. Denn liegt z. B. der Punkt N':

$$\mu' = +1$$

auf einer oder λ solcher Trennungskurven $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_j \ldots \sigma_\lambda$,*) die den Breitenkreis

$$\mu' = 1 - \varepsilon$$

in den Punkten 1, 2, ... j ... λ schneiden mögen, so kann man zunächst durch je zwei Meridiane

$$\varphi_j' + \delta_j \text{ und } \varphi_j' - \delta_j$$

aus dem genannten Breitenkreise die λ Strecken

$$j - \delta_j \text{ bis } j + \delta_j$$

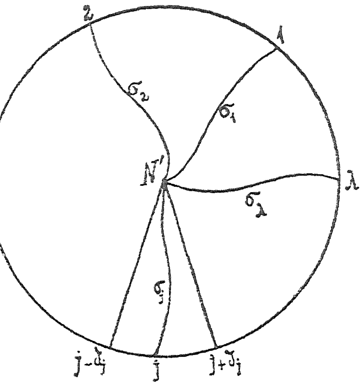


Fig. 50.

ausschneiden, und es wird bei Ausschluss derselben die Funktion:

$$F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')$$

auf dem Breitenkreis:

$$\mu' = 1 - \varepsilon$$

eindeutig und stetig sein und sich durch Verkleinerung von ε unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lassen. Andererseits ist jedes:

$$\text{abs.} \int_{\varphi_j' - \delta_j}^{\varphi_j' + \delta_j} [F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')]\, d\varphi' \overline{\lessgtr} 4\delta_j \text{ abs. Max. (F)}$$

und durch Verkleinerung von δ_j (das wir bei genügender Verkleinerung von ε beliebig klein machen können) unter jeden Kleinheitsgrad herabdrückbar. Es ist somit in jedem Falle:

$$\int_0^{2\pi} [F(1-\varepsilon, \varphi') - F(1, \varphi')]\, P_n(\varrho_{N+1})\, d\varphi'$$

durch Verkleinerung von ε unter jeden Kleinheitsgrad herabdrückbar; Gleiches folgt analog für:

$$\int_0^{2\pi} [F(-1, \varphi') - F(-1+\varepsilon, \varphi')]\, P_n(\varrho_0)\, d\varphi',$$

*) λ ist dabei eine endliche Zahl.

und es ergiebt sich aus 149):

$$150)\quad \Psi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^n \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi' + D_{\varepsilon,\, n},$$

analog:

$$151)\quad \Psi_{n+1} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^{n+1} \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi' + D_{\varepsilon,\, n+1},$$

wo $D_{\varepsilon,\, n}$ und $D_{\varepsilon,\, n+1}$ Gröfsen vorstellen, die durch Verkleinerung von ε und nachher durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Es folgt weiter:

$$152)\quad \Sigma_n \equiv \Psi_n + \Psi_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + D_n,$$

wo D_n wieder durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Die Formel 152) liefert uns das Resultat:

$$153)\quad \lim_{n=\infty} \Sigma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi'.$$

Ist f in dem Punkte $(\mu_1\ \varphi_1)$ stetig, so folgt hieraus, wie früher:

$$\lim_{n=\infty} \Sigma_n = f(\theta_1, \varphi_1),$$

liegt dagegen der Punkt $(\theta_1\ \varphi_1)$ auf einer oder mehreren der Trennungskurven von Oberflächenteilen, auf denen f stetig ist, so sagt uns die Formel 153) aus, dass sich die Reihe Σ_n mit wachsendem n einem Grenzwert nähert, welcher sich als das arithmetische Mittel der Werte von f auf einem unendlich kleinen den Punkt $(\theta_1\ \varphi_1)$ umschliefsenden Kreise darstellt.

Vb) Die Laplacesche Entwickelung:

$$f(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi) \sum_0^{\infty} n\,(2n+1)\, P_n\Big(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\,\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi-\varphi_1)\Big)\, d\mu\, d\varphi, \quad \begin{pmatrix} 0 \leqq \theta_1 \leqq \pi, \\ 0 \leqq \varphi_1 \leqq 2\pi \end{pmatrix}$$

gilt für jede Funktion $f(\theta, \varphi)$, welche auf der Kugelfläche abteilungsweise eindeutig und stetig und auf jedem Hauptkreise abteilungsweise monoton ist, falls der Punkt $(\theta_1\ \varphi_1)$ nicht gerade

auf einer Trennungskurve von Oberflächenteilen liegt, auf denen f eindeutig und stetig ist. In diesem Ausnahmefall stellt die Reihe rechts das arithmetische Mittel der Werte von f auf einem den Punkt ($\vartheta_1 \varphi_1$) umschliefsenden unendlich kleinen Kreise dar.

§ 5.

Es ist für unsere späteren Untersuchungen von Wichtigkeit, dass man für die Laplacesche Entwickelung der Funktion f etwas andere Bedingungen vorschreiben kann, als die im Satze Va) und Vb) zu Grunde gelegten.

Wir wollen von der Funktion f, die wir als eine Funktion der Stelle ($\xi \eta \zeta$) auf der Kugelfläche auffassen, voraussetzen, dass sie auf derselben abteilungsweise eindeutig und stetig ist, dass ferner ihre ersten Ableitungen endlich sind, solange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven der Oberflächenteile hält, auf denen f eindeutig und stetig ist, und dass schliefslich bei genügender Annäherung an diese Trennungskurven die Gleichungen bestehen:

$$154) \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial f}{\partial \xi} = \varDelta_1(\varrho), \\ \varrho \dfrac{\partial f}{\partial \eta} = \varDelta_2(\varrho), \\ \varrho \dfrac{\partial f}{\partial \zeta} = \varDelta_3(\varrho), \end{cases}$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes ($\xi \eta \zeta$) von jenen Trennungskurven vorstellt und $\varDelta_1(\varrho)\, \varDelta_2(\varrho)\, \varDelta_3(\varrho)$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.*)

Die Umformung des § 2 wird nach wie vor richtig sein, wenn wir noch zur Wahrung vollkommener Strenge sehr kleine die Trennungskurven umschliefsenden Flächenstücke von der Integration ausschliefsen; wir können dieselben aber so klein machen, dass bei beliebig grofsem n die über diese Flächenstücke zu erstreckenden Integrale:

$$\int f \sum_0^n j\,(2j+1)\,P_j(\cos\gamma)\,d\omega$$

unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Wir können nun, indem wir im folgenden stets stillschweigend die genannten kleinen Flächenstücke von der Integration ausschliefsen, die Gleichung 140a) für Ψ_n folgendermafsen schreiben:

*) Und zwar von der Art, dass bei genügend kleinem ϱ jede derselben $\overline{\gtrless} A \cdot \varrho^{1-\lambda}$, $\lambda < 1$, wo A eine endliche Konstante vorstellt.

$$\psi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^n \int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi'$$

$$-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial F}{\partial \mu'} P_n(\mu')\, d\mu'\, d\varphi',$$

oder (wir nehmen den Radius R der Kugel $= 1$ an):

$$155)\quad \left\{\begin{aligned} \psi_n &= \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^n \int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi' \\ &- \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial F}{\partial \xi'} P_n(\mu')\, d\mu'\, d\varphi'. \end{aligned}\right.$$

Wir zerlegen nun das dritte Integral rechts:

$$156)\quad J_n = \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial F}{\partial \xi'} P_n(\mu')\, d\mu'\, d\varphi' = \int_{(R)} \frac{\partial F}{\partial \xi'} P_n(\mu)\, d\omega$$

in zwei Teile, indem wir von der Kugelfläche eine Fläche ω_1 abscheiden, welche alle Trennungskurven enthält und klein genug ist, dass innerhalb derselben:

$$157)\quad \varrho \frac{\partial F}{\partial \xi'} = \varDelta(\varrho)$$

ist, wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven und $\varDelta(\varrho)$ eine Gröfse vorstellt, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann; während der übrige Teil ω_2 der Kugelfläche so beschaffen ist, dass jeder seiner Punkte von den Trennungskurven einen Abstand besitzt, der gröfser ist, als die beliebig klein zu wählende Länge P. Wie klein wir nun auch P machen, immer können wir (mit Benützung des Hilfssatzes 2) das Integral:

$$\int_{\omega_2} \frac{\partial F}{\partial \xi'} P_n(\mu')\, d\omega$$

durch Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken; andererseits ist:

$$\text{abs.} \int_{\omega_1} \frac{\partial F}{\partial \xi'} P_n(\mu')\, d\omega \leqq \int_{\omega_1} \text{abs.} \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\omega,$$

und das rechts stehende Integral kann durch Verkleinerung von P unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden.(37) Es ist somit nach 155):

$$158)\quad \begin{cases} \psi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^n \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi' \\ \quad + D_{P,n}, \end{cases}$$

analog:

$$159)\quad \begin{cases} \psi_{n+1} = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + (-1)^{n+1} \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi' \\ \quad + D_{P,n+1}, \end{cases}$$

wo $D_{P,n}$ und $D_{P,n+1}$ Gröfsen vorstellen, die durch Verkleinerung von P und nachher durch genügende Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können. Es folgt also wieder:

$$160)\quad \Sigma_n \equiv \psi_n + \psi_{n+1} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + D_n,$$

wo D_n durch Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabdrückbar ist, und:

$$161)\quad \lim_{n=\infty} \Sigma_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi'.$$

Vc) Die Laplacesche Entwickelung:

$$f(\theta_1, \varphi_1) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(\theta, \varphi) \sum_0^{\infty} {}^n (2n+1) P_n \big(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1^2}\cos(\varphi - \varphi_1)\big)\, d\mu\, d\varphi, \quad \begin{pmatrix} 0 \overline{\overline{<}} \theta_1 \overline{\overline{<}} \pi, \\ 0 \overline{\overline{<}} \varphi_1 \overline{\overline{<}} 2\pi \end{pmatrix},$$

gilt für jede Funktion $f(\theta, \varphi)$ der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf der Kugelfläche, die auf derselben abteilungsweise eindeutig und stetig ist, deren erste Ableitungen

$$\frac{\partial f}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad \frac{\partial f}{\partial \zeta}$$

auf derselben endlich sind, solange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven der Oberflächenteile hält, auf denen f eindeutig und stetig ist, und bei genügender

Annäherung an diese Trennungskurven die Gleichungen erfüllen:

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial \xi} = \Delta_1(\varrho),$$

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial \eta} = \Delta_2(\varrho),$$

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial \zeta} = \Delta_3(\varrho),$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes $(\xi \eta \zeta)$ von jenen Trennungskurven vorstellt und $\Delta_1(\varrho)\, \Delta_2(\varrho)\, \Delta_3(\varrho)$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können (von der Art, dass bei genügend kleinem ϱ jede derselben

$$\leqq A \varrho^{1-\lambda}, \quad (\lambda < 1),$$

wo A eine endliche Konstante vorstellt). Der Satz wird eine Ausnahme erleiden, wenn der Punkt (θ_1, φ_1) gerade auf einer Trennungskurve liegt; in diesem Ausnahmefall stellt die Reihe rechts das arithmetische Mittel der Werte von f auf einem den Punkt (θ_1, φ_1) umschliefsenden unendlich kleinen Kreise dar.

3. Kapitel.

Ganze homogene Funktionen der Richtungskosinusse irgend einer Richtung (θ, φ) als allgemeine Kugelfunktionen.

§ 1.

Wir bezeichnen mit a, b, c die Richtungskosinusse der Richtung vom Centrum der Kugel nach irgend einem Punkte (θ, φ) derselben: wir wollen zeigen, dass jede ganze homogene Funktion nten Grades von a, b, c:

$$162) \quad f_n(a, b, c) = \sum\nolimits^{i} \sum\nolimits^{\varkappa} \sum\nolimits^{\lambda} C_{i \varkappa \lambda}\, a^i b^{\varkappa} c^{\lambda}, \quad (i + \varkappa + \lambda = n)$$

sich stets als eine allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung von μ und φ darstellen lässt, sobald die Relation:

$$163) \quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial c^2} = 0$$

identisch für beliebige*) a, b, c, erfüllt ist.

*) Die auch der Bedingung:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

nicht unterworfen zu sein brauchen.

Wir multiplizieren hierzu die Gleichung 162) mit r^n, wo r die Entfernung irgend eines Punktes (xyz) auf der Richtung (ϑ, φ) vom Centrum der Kugel vorstellt, so dass:

$$164) \begin{cases} x = r \cdot a, \\ y = r \cdot b, \\ z = r \cdot c; \end{cases}$$

dann folgt aus 162):

$$165) \quad r^n f_n(a, b, c) = f_n(x, y, z),$$

so dass nach 163) für jeden Punkt (x, y, z) des Raumes die Funktion:

$$166) \quad \Phi_n = r^n f_n(a, b, c)$$

der Laplaceschen Differentialgleichung genügt:

$$167) \quad \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_n}{\partial z^2} = 0.$$

Wir können nun a, b, c, somit auch $f_n(a, b, c)$ in Polarkoordinaten transformieren, durch die Transformationsgleichungen:

$$168) \begin{cases} a = \mu, \\ b = \sqrt{1-\mu^2} \cdot \cos\varphi, \\ c = \sqrt{1-\mu^2} \cdot \sin\varphi. \end{cases}$$

Es wird nach denselben analog der Untersuchung S. 138 $f_n(a, b, c)$ von der Form: [38]

$$169) \quad f_n(a,b,c) = \sum_0^n {}_j(\sqrt{1-\mu^2})^j (f_{nj} \cos j\varphi + g_{nj} \sin j\varphi),$$

wo die f_{nj} und g_{nj} ganze rationale Funktionen von μ sind. Nun soll:

$$\Phi = r^n f_n(a, b, c)$$

der Laplaceschen Differentialgleichung genügen, also der Gleichung (vgl. Formel 32)):

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial \Phi}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} = 0,$$

und daraus ergiebt sich (vgl. die analoge Betrachtung S. 134) für $f_n(a, b, c)$ die Differentialgleichung:

$$170)\quad n(n+1)\, f_n(a,b,c) +) \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial f_n(a,b,c)}{\partial \mu}\right] + \frac{1}{1-\mu^2}\,\frac{\partial^2 f_n(a,b,c)}{\partial \varphi^2} = 0.$$

Setzen wir in 170) den Wert 169) von $f_n(a, b, c)$ ein, so folgt:

$$\sum_0^n{}_j \left[\cos j\varphi \left\{n(n+1)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j f_{nj} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j f_{nj}\right\}\right] - j^2\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^{j-2} f_{nj}\right\} + \sin j\varphi \left\{n(n+1)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j g_{nj} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\frac{\partial}{\partial \mu}\left\{\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j g_{nj}\right\}\right] - j^2\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^{j-2} g_{nj}\right\}\right] = 0;$$

diese Gleichung soll für beliebige φ bestehen; es folgt daher einzeln:

$$171)\quad \begin{cases} n(n+1)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j f_{nj} + \dfrac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial}{\partial \mu}\left\{\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j f_{nj}\right\}\right] - j^2\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^{j-2} f_{nj} = 0, \\ n(n+1)\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j g_{nj} + \dfrac{\partial}{\partial \mu}\left[(1-\mu^2)\dfrac{\partial}{\partial \mu}\left\{\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^j g_{nj}\right\}\right] - j^2\left(\sqrt{1-\mu^2}\right)^{j-2} g_{nj} = 0, \end{cases}$$

oder nach einer einfachen Umformung:(30)

$$172)\quad \begin{cases} (n-j)(n+j+1)\, f_{nj} - (2j+2)\,\mu\dfrac{\partial f_{nj}}{\partial \mu} + (1-\mu^2)\dfrac{\partial^2 f_{nj}}{\partial \mu^2} = 0; \\ (n-j)(n+j+1)\, g_{nj} - (2j+2)\,\mu\dfrac{\partial g_{nj}}{\partial \mu} + (1-\mu^2)\dfrac{\partial^2 g_{nj}}{\partial \mu^2} = 0; \end{cases}$$

f_{nj} und g_{nj} sind ganze rationale Funktionen von μ und genügen den Differentialgleichungen 172); es ist somit nach Zusatz 1 zu IIa):

$$173)\quad f_{nj} = A_{nj}\, P_n^{(j)}(\mu),\quad g_{nj} = B_{nj}\, P_n^{(j)}(\mu)$$

wo die A_{nj} und B_{nj} Konstanten sind, und:

$$174)\quad f_n(a, b, c) = \sum_0^n{}_j\, P_{nj}(\mu)\left[A_{nj}\cdot \cos j\varphi + B_{nj}\cdot \sin j\varphi\right].$$

Damit ist bewiesen, dass sich jede ganze homogene Funktion n ten Grades von a, b, c als eine allgemeine Kugelfunktion n ter Ordnung von μ und φ darstellen lässt.

Umgekehrt lässt sich auch zeigen, dass sich jede allgemeine Kugelfunktion n ter Ordnung von μ und φ:

$$175)\quad Y_n(\mu, \varphi) = \sum_0^n{}^j P_{nj}(\mu)\left[A_{nj}\cos j\varphi + B_{nj}\sin i\varphi\right]$$

als eine ganze homogene Funktion n ten Grades f_n von a, b, c darstellen lässt, welche für ganz beliebige a, b, c der Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial c^2} = 0$$

genügt.

Zunächst folgt durch successive Anwendung der Formeln:

$$\cos(i+1)\varphi = \cos i\varphi \cos\varphi - \sin i\varphi \sin\varphi,$$
$$\sin(i+1)\varphi = \sin i\varphi \cos\varphi + \cos i\varphi \sin\varphi,$$

dass man jedes $\cos j\varphi$ und $\sin j\varphi$ auf die Form bringen kann:

$$\left.\begin{aligned}\cos j\varphi &= \sum{}^{\varkappa}\sum{}^{\lambda}\alpha_{\varkappa\lambda}\cos^{\varkappa}\varphi\sin^{\lambda}\varphi,\\ \sin j\varphi &= \sum{}^{\varkappa}\sum{}^{\lambda}\beta_{\varkappa\lambda}\cos^{\varkappa}\varphi\sin^{\lambda}\varphi,\end{aligned}\right\}\quad(\varkappa+\lambda=j)$$

wo die $\alpha_{\varkappa\lambda}$ $\beta_{\varkappa\lambda}$ Zahlenfaktoren sind, somit nach 175) und 168) $Y_n(\mu, \varphi)$ auf die Form:

$$Y_n(\mu, \varphi) = \sum_0^n{}^j P_n^{(j)}(a)\sum{}^{\varkappa}\sum{}^{\lambda} c_{j\varkappa\lambda}\, b^{\varkappa} c^{\lambda}, \quad (\varkappa+\lambda=j),$$

wo die $c_{j\varkappa\lambda}$ Konstanten sind.

Nun ist $P_n^{(j)}(a)$ von der Form:

$$P_n^{(j)}(a) = \alpha_0 a^{n-j} + \alpha_1 a^{n-j-2} + \alpha_2 a^{n-j-4} + \cdots,$$

wo die $\alpha_0\, \alpha_1\, \alpha_2 \ldots$ Zahlenfaktoren sind, kann also auch so geschrieben werden:

$$P_n^{(j)}(a) = \alpha_0 a^{n-j} + \alpha_1 a^{n-j-2}(a^2+b^2+c^2) + \alpha_2 a^{n-j-4}(a^2+b^2+c^2)^2 + \cdots,$$

so dass $Y_n(\mu, \varphi)$ die homogene Form erhält:

$$176)\quad Y_n(\mu, \varphi) = \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda C_{i\varkappa\lambda}\, a^i\, b^\varkappa\, c^\lambda, \quad i + \varkappa + \lambda = n.$$

Da:

$$r^n\, Y_n(\mu, \varphi)$$

für beliebige x, y, z der Laplaceschen Gleichung genügt, so muss auch:

$$\sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda C_{i\varkappa\lambda}\, x^i\, y^\varkappa\, z^\lambda, \quad i + \varkappa + \lambda = n$$

für beliebige x, y, z der Laplaceschen Gleichung genügen und somit die Funktion:

$$177)\quad f_n(a, b, c) = \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda C_{i\varkappa\lambda}\, a^i\, b^\varkappa\, c^\lambda, \quad i + \varkappa + \lambda = 0$$

der Differentialgleichung:

$$178)\quad \frac{\partial^2 f_n}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial c^2} = 0$$

für beliebige a, b, c.

VI. Jede ganze homogene Funktion nten Grades der Richtungskosinusse einer Richtung (θ, φ):

$$f_n = \sum_i \sum_\varkappa \sum_\lambda C_{i\varkappa\lambda}\, a^i\, b^\varkappa\, c^\lambda, \quad i + \varkappa + \lambda = n,$$

welche für beliebige (auch der Bedingung:

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1$$

nicht unterworfene) a, b, c der Differentialgleichung genügt:

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial c^2} = 0,$$

ist darstellbar als eine allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung von μ und φ, und umgekehrt ist jede allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung von μ und φ darstellbar als eine ganze homogene Funktion nten Grades f_n von a, b, c, die für ganz beliebige a, b, c der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial c^2} = 0$$

genügt.

§ 2.

Aus der völligen Identität*) der Funktionen

$$f_n(a, b, c) \text{ und } Y_n(\mu, \varphi)$$

ergiebt sich, dass wir alle Sätze, die wir für die $Y_n(\mu, \varphi)$ abgeleitet haben, ohne Weiteres auf die $f_n(a, b, c)$ übertragen können. Wir erhalten so mit Hilfe von Satz IVb) und Va) (Vb und Vc) die folgenden Zusätze:

Zusatz 1 zu VI. Ist $f_n(a, b, c)$ eine allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung, und sind a_1, b_1, c_1 die Richtungskosinusse einer beliebigen Richtung, so ist das Integral über die Kugelfläche von dem Radius 1:

$$179) \quad \int f_n(a, b, c)\, P_j(a a_1 + b b_1 + c c_1)\, d\omega = 0, \quad j \neq n,$$

dagegen:

$$180) \quad \int f_n(a, b, c)\, P_n(a a_1 + b b_1 + c c_1)\, d\omega = \frac{4\pi}{2n+1} f_n(a_1, b_1, c_1).$$

Es folgt dies unmittelbar aus den Formeln des Satzes IVb, wenn man bedenkt, dass wir:

$$\cos\gamma = a a_1 + b b_1 + c c_1$$

setzen können.

---

*) Es ergiebt sich aus dieser Identität, dass die Funktionen $f_n(a, b, c)$, wie die $Y_n(\mu, \varphi)$, gerade $(2n+1)$ willkürliche Konstanten enthalten. Es lässt sich dies leicht auch so verifizieren: Die Zahl der Konstanten $C_{i\varkappa\lambda}$ in irgend einer ganzen homogenen Funktion nten Grades von a, b, c ist:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

die Gleichung:

$$\frac{\partial^2 f_n}{\partial a^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial b^2} + \frac{\partial^2 f_n}{\partial c^2} \equiv 0$$

ergiebt:

$$\frac{n(n-1)}{2} \text{ Relationen.}$$

Die Zahl der willkürlichen Konstanten ist also:

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = 2n+1.$$

Zusatz 2 zu VI. Jede Funktion f der Stelle auf der Kugelfläche, welche den Voraussetzungen des Satzes Va) (Vb oder Vc) genügt, ist mittelst der Entwickelung:

$$181)\quad f(a_1, b_1, c_1) = \frac{1}{4\pi}\int f(a, b, c)\sum_0^{\infty} j\,(2j+1)\,P_j\,(a a_1 + b b_1 + c c_1)\,d\omega,$$

in eine Reihe entwickelbar, welche nach allgemeinen Kugelfunktionen $f_n(a_1, b_1, c_1)$ fortschreitet. Die Formel 181) erleidet nur eine Ausnahme für Punkte auf den Trennungskurven von Flächenteilen, auf denen f eindeutig und stetig ist.

§ 3.

Um die Entwickelung 181) wirklich in gegebenen Fällen numerisch auszuführen, ist oft ein Hilfssatz sehr brauchbar, den ich hier kurz ableiten will.

Es handelt sich um die numerische Berechnung des Integrales über die Kugelfläche (1):

$$182)\quad J(i, \varkappa, \lambda) = \int a^i\, b^{\varkappa}\, c^{\lambda}\, d\omega,$$

in dem i, $\varkappa$, λ beliebige positive ganze Zahlen vorstellen. Zunächst ist klar, dass J verschwinden muss, wenn irgend eine der Zahlen i, $\varkappa$, λ ungerade ist.(39) Es kann sich nur um den Wert des Integrales:

$$183)\quad J(2i, 2\varkappa, 2\lambda) = \int a^{2i}\, b^{2\varkappa}\, c^{2\lambda}\, d\omega$$

handeln. Es ist nun:

$$184)\quad \begin{cases} J(2i, 2\varkappa, 2\lambda) = \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{0}^{2\pi} \mu^{2i}(1-\mu^2)^{\varkappa+\lambda}\cos^{2\varkappa}\varphi\,\sin^{2\lambda}\varphi\,d\mu\,d\varphi, \\ \qquad = J_1 \cdot J_2, \end{cases}$$

wo:

$$185)\quad \begin{cases} J_1 = \int\limits_{-1}^{+1} \mu^{2i}(1-\mu^2)^{\varkappa+\lambda}\,d\mu, \\ J_2 = \int\limits_{0}^{2\pi} \cos^{2\varkappa}\varphi\,\sin^{2\lambda}\varphi\,d\varphi. \end{cases}$$

Es folgt weiter durch successive partielle Integration:

$$J_1 = \int_{-1}^{+1} \frac{2 \cdot (\varkappa + \lambda)}{2i + 1}\, \mu^{2i+2} (1 - \mu^2)^{\varkappa + \lambda - 1}\, d\mu,$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{2^2 \cdot (\varkappa + \lambda)(\varkappa + \lambda - 1)}{(2i+1)(2i+3)}\, \mu^{2i+4} (1 - \mu^2)^{\varkappa + \lambda - 2}\, d\mu,$$

$$= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$= \int_{-1}^{+1} \frac{2^{\varkappa + \lambda}\, \Pi(\varkappa + \lambda)}{(2i+1)(2i+3) \ldots (2i + 2\varkappa + 2\lambda - 1)}\, \mu^{2i + 2\varkappa + 2\lambda}\, d\mu,$$

$$= \frac{2^{\varkappa + \lambda + 1}\, \Pi(\varkappa + \lambda)}{(2i+1)(2i+3) \ldots (2i + 2\varkappa + 2\lambda + 1)},$$

oder, da:

$$(2i+1)(2i+3) \ldots (2i + 2\varkappa + 2\lambda + 1) = \frac{\Pi(2i + 2\varkappa + 2\lambda + 1)}{2^{i + \varkappa + \lambda}\, \Pi(i + \varkappa + \lambda)} \cdot \frac{2^i\, \Pi(i)}{\Pi(2i)},$$

$$186) \quad J_1 = 2\, \frac{\Pi(i + \varkappa + \lambda)\, \Pi(\varkappa + \lambda)\, \Pi(2i)}{\Pi(2i + 2\varkappa + 2\lambda + 1)\, \Pi(i)}.$$

Es folgt gleichfalls durch successive partielle Integration:

$$J_2 = \int_0^{2\pi} \frac{2\lambda - 1}{2\varkappa + 1} \cos^{2\varkappa + 2}\varphi \sin^{2\lambda - 2}\varphi\, d\varphi,$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(2\lambda - 1)(2\lambda - 3)}{(2\varkappa + 1)(2\varkappa + 3)} \cos^{2\varkappa + 4}\varphi \sin^{2\lambda - 4}\varphi\, d\varphi,$$

$$= \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{(2\lambda - 1)(2\lambda - 3) \ldots 3 \cdot 1}{(2\varkappa + 1)(2\varkappa + 3) \ldots (2\varkappa + 2\lambda - 1)} \cos^{2\varkappa + 2\lambda}\varphi\, d\varphi,$$

oder, da:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2\varkappa + 2\lambda}\varphi\, d\varphi = 2\pi\, \frac{\Pi(2\varkappa + 2\lambda)}{[\Pi(\varkappa + \lambda)]^2\, 2^{2\varkappa + 2\lambda}}. \; (40)$$

$$1 \cdot 3 \ldots (2\lambda - 3)(2\lambda - 1) = \frac{\Pi(2\lambda)}{2^\lambda\, \Pi(\lambda)},$$

$$(2\varkappa + 1)(2\varkappa + 3) \ldots (2\varkappa + 2\lambda - 1) = \frac{\Pi(2\varkappa + 2\lambda)}{2^{\varkappa + \lambda}\, \Pi(\varkappa + \lambda)} \cdot \frac{2^\varkappa\, \Pi(\varkappa)}{\Pi(2\varkappa)},$$

auch:

$$187)\quad J_2 = 2\pi \frac{\Pi(2\varkappa + 2\lambda)\,\Pi(2\lambda)\,\Pi(2\varkappa)}{\Pi(\varkappa + \lambda)\,\Pi(\varkappa)\,\Pi(\lambda)},$$

somit:

$$188)\quad J(2i, 2\varkappa, 2\lambda) = J_1\,J_2 = 4\pi \frac{\Pi(2i)\,\Pi(2\varkappa)\,\Pi(2\lambda)}{\Pi(i)\,\Pi(\varkappa)\,\Pi(\lambda)} \cdot \frac{\Pi(i + \varkappa + \lambda)}{\Pi(2i + 2\varkappa + 2\lambda + 1)}.$$

Hilfssatz. Es ist das über die Kugel von dem Radius 1 zu erstreckende Integral:

$$\int a^{2i}\,b^{2\varkappa}\,c^{2\lambda}\,d\omega = 4\pi \frac{\Pi(2i)\,\Pi(2\varkappa)\,\Pi(2\lambda)}{\Pi(i)\,\Pi(\varkappa)\,\Pi(\lambda)} \cdot \frac{\Pi(i + \varkappa + \lambda)}{\Pi(2i + 2\varkappa + 2\lambda + 1)},$$

wenn i, $\varkappa$, λ beliebige ganze positive Zahlen sind, dagegen ist jedes:

$$\int a^i\,b^\varkappa\,c^\lambda\,d\omega = 0,$$

in dem irgend eine der positiven ganzen Zahlen i, $\varkappa$, λ ungerade ist.

III. Abschnitt.

Berechnung der Integrale V und W für die Kugelfläche.

---

1. Kapitel.

Anwendung der Theorie der allgemeinen Kugelfunktionen von μ und φ.

§ 1.

Es sei H eine Funktion der Stelle (θ, φ) auf der Kugelfläche (R), welche den Voraussetzungen des Satzes Va) (Vb oder Vc) genügt, dann ist nach diesem Satze (diesen Sätzen) H in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende Reihe zu verwandeln:

$$189)\quad H(\theta, \varphi) = \sum_0^\infty {}^n\, H_n(\mu, \varphi),$$

wo:

$$190)\quad H_n(\mu,\varphi) = \frac{2n+1}{4\pi}\int\limits_0^{2\pi}\int\limits_{-1}^{+1} H(\mu',\varphi')\, P_n\Big(\mu\mu'$$

$$+\sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi'-\varphi)\Big)\, d\mu'\, d\varphi'.$$

Bilden wir nun das Flächenpotential:

$$191)\quad V = \int\limits_{(R)} \frac{H\, d\omega}{r}$$

und setzen in demselben für H den Wert 189) ein, so folgt mit Hilfe des Zusatzes 1 zu IV b) für Punkte $(r_1\, \mu_1\, \varphi_1)$ innerhalb der Kugel (R):

$$192a)\quad V_i = 4\pi R \sum_0^{\infty}{}^{n} \frac{1}{2n+1} H_n(\mu_1,\varphi_1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,\quad (r_1 < R),$$

für Punkte $(r_1\, \mu_1\, \varphi_1)$ aufserhalb der Kugel (R):

$$192b)\quad V_a = 4\pi R \sum_0^{\infty}{}^{n} \frac{1}{2n+1} H_n(\mu_1,\varphi_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},\quad (R < r_1),$$

falls diese Reihen konvergent sind. Das folgt aber, sobald wir von V_i und V_a überhaupt aussagen können, dass sie für irgend eine Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen von $\mu_1\, \varphi_1$ entwickelbar sind.

VIIa) Das Flächenpotential:

$$V = \int\limits_{(R)} \frac{H}{r}\, d\omega$$

einer Kugelfläche von dem Radius R, in dem H nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar ist, hat für innere Punkte $(r_1\, \mu_1\, \varphi_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$V_i = 4\pi R \sum_0^{\infty}{}^{n} \frac{1}{2n+1} H_n(\mu_1,\varphi_1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

für äufsere Punkte $(r_1\, \mu_1\, \varphi_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$V_a = 4\pi R \sum_0^\infty {}^n \frac{1}{2n+1} H_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},$$

sobald wir von V_i und V_a überhaupt aussagen können, dass sie für irgend eine Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen von $\mu_1\, \varphi_1$ entwickelbar sind.

Dabei ist jedes:

$$H_n(\mu_1, \varphi_1) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} H(\theta, \varphi)\, P_n\Big(\mu\mu_1 + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu_1{}^2}\cos(\varphi - \varphi_1)\Big)\, d\mu\, d\varphi.$$

§ 2.

Es sei $\varkappa$ eine Funktion der Stelle (θ, φ) auf der Kugelfläche (R), welche den Voraussetzungen des Satzes V a) (V b oder V c) genügt, dann ist nach diesem Satze (diesen Sätzen) $\varkappa$ in eine nach allgemeinen Kugelfunktionen fortschreitende Reihe zu verwandeln:

$$193)\quad \varkappa(\theta, \varphi) = \sum_0^\infty {}^n \varkappa_n(\mu, \varphi),$$

wo:

$$194)\quad \varkappa_n(\mu, \varphi) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \varkappa(\theta, \varphi)\, P_n\Big(\mu\mu' + \sqrt{1-\mu^2}\sqrt{1-\mu'^2}\cos(\varphi' - \varphi)\Big)\, d\mu'\, d\varphi'.$$

Bilden wir nun das Flächenintegral:

$$195)\quad W = \int_{(R)} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

in dem ν die innere Normale des Elementes $d\omega$ vorstellt, und setzen in demselben für $\varkappa$ den Wert 193) ein, so folgt mit Hilfe des Zusatzes 2 zu IVb) für Punkte $(r_1 \mu_1 \varphi_1)$ innerhalb der Kugelfläche:

$$196\text{a)}\quad W_i = 4\pi \sum_0^\infty {}_n \frac{n+1}{2n+1} \varkappa_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n, \quad (r_1 < R),$$

für Punkte $(r_1 \mu_1 \varphi_1)$ aufserhalb der Kugelfläche:

$$196\text{b)}\quad W_a = -4\pi \sum_0^\infty {}_n \frac{n}{2n+1} \varkappa_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1}, \quad (R < r_1).$$

falls diese Reihen konvergent sind. Das folgt aber, sobald überhaupt W_i resp. W_a für irgend eine Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen von $\mu_1 \varphi_1$ entwickelbar sind.

VIIb) Das Flächenintegral:

$$W = \int_{(R)} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

über eine Kugelfläche von dem Radius R, in dem $\varkappa$ nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar ist und ν die innere Normale eines Elementes $d\omega$ vorstellt, hat für innere Punkte $(r_1 \mu_1 \varphi_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$W_i = 4\pi \sum_0^\infty {}_n \frac{n+1}{2n+1} \varkappa_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

für äufsere Punkte $(r_1 \mu_1 \varphi_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$W_a = -4\pi \sum_0^\infty {}_n \frac{n}{2n+1} \varkappa_n(\mu_1, \varphi_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},$$

falls überhaupt W_i resp. W_a für irgend eine Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen von $\mu_1 \varphi_1$ entwickelbar sind.

Dabei ist jedes:

$$\varkappa_n(\mu_1, \varphi_1) = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^{+1} \varkappa(\theta, \varphi) \, P_n \Big(\mu \mu_1 + \sqrt{1-\mu^2} \sqrt{1-\mu_1{}^2} \cos(\varphi - \varphi_1)\Big) \, d\mu \, d\varphi.$$

2. Kapitel.

Herstellung der Symmetrie.

§ 1.

Zur Wiederherstellung der Symmetrie, welche durch die Einführung der Polarkoordinaten gestört ist, nehmen wir die Funktionen H und $\varkappa$ nicht mehr als Funktionen von θ, φ, sondern als Funktionen der Richtungskosinusse a, b, c an, welche mit θ, φ durch die Relationen verbunden sind:

$$a = \cos\theta,$$
$$b = \sin\theta \cos\varphi,$$
$$c = \sin\theta \sin\varphi,$$

Wir können dann mit Hilfe des Satzes VI und seiner Zusätze dem Satze VIIa) die folgende Form geben:

VIIIa) Das Flächenpotential:

$$V = \int_{(R)} \frac{H}{r} \, d\omega$$

einer Kugelfläche von dem Radius R, in dem H nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar ist, hat für innere Punkte $(r_1 a_1 b_1 c_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$197\text{a)} \quad V_i = 4\pi R \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{2n+1} H_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

für äufsere Punkte $(r_1 a_1 b_1 c_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$197\text{b)} \quad V_a = 4\pi R \sum_0^\infty {}_n \frac{1}{2n+1} H_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^n,$$

falls überhaupt V_i resp. V_a für irgend eine Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen von $\mu_1\ \varphi_1$ entwickelbar sind.

Dabei ist jedes:

$$198)\quad H_n(a_1, b_1, c_1) = \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int\limits_{(R)} H(a, b, c)\, P_n(a a_1 + b b_1 + c c_1)\, d\omega.$$

§ 2.

In gleicher Weise können wir dem Satze VIIb) die folgende Form geben:

VIIIb) Das Flächenintegral:

$$W = \int\limits_{(R)} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

über eine Kugelfläche von dem Radius R, in dem $\varkappa$ nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar ist und ν die innere Normale eines Elementes $d\omega$ vorstellt, hat für innere Punkte $(r_1\, a_1\, b_1\, c_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$199\text{a})\quad W_i = 4\pi \sum_0^\infty{}^n \frac{n+1}{2n+1} \varkappa_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

für äufsere Punkte $(r_1\, a_1\, b_1\, c_1)$ (die auch unendlich nahe an die Kugelfläche herantreten können) den Wert:

$$199\text{b})\quad W_a = -4\pi \sum_0^\infty{}^n \frac{n}{2n+1} \varkappa_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},$$

falls überhaupt W_i resp. W_a für irgend eine Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen von $\mu_1\ \varphi_1$ entwickelbar sind.

Dabei ist jedes:

$$200)\quad \varkappa_n(a_1, b_1, c_1) = \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int\limits_{(R)} \varkappa(a, b, c)\, P_n(a a_1 + b b_1 + c c_1)\, d\omega.$$

III. Teil.

Theorie der Potentialfunktionen.

I. Abschnitt.

Einführung der Potentialfunktionen und Darstellung derselben durch Oberflächenintegrale.

1. Kapitel.

Definition der Potentialfunktionen.

§ 1.

Definition 1. Eine Funktion U der Stelle (xyz) in dem Innenraum τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω heifst eine Potentialfunktion desselben, wenn sie in dem Raume τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, der Differentialgleichung:

$$1)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

genügt, und wenn ihre zweiten und höheren [41] Ableitungen innerhalb des Raumes τ eindeutig und stetig sind, d. h. in jedem Teile des Raumes τ, dessen Punkte von der Fläche ω durch irgend welche (im übrigen beliebig kleine) Entfernungen getrennt sind.

§ 2.

Definition 2. Eine Funktion U der Stelle (xyz) in dem Aufsenraum τ einer geschlossenen, stetig ge-

krümmten Fläche ω heifst eine Potentialfunktion desselben, wenn sie in dem Raume τ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, der Differentialgleichung 1) genügt, und wenn ihre zweiten und höheren(41) Ableitungen innerhalb des Raumes τ eindeutig und stetig sind, d. h. in jedem Teile des Raumes τ, dessen Punkte von der Fläche ω durch irgend welche (im übrigen beliebig kleine) Entfernungen getrennt sind.

Bezeichnet ferner P die Entfernung des variabeln Punktes (xyz) von einem im Endlichen gelegenen Punkte O, so sollen die Ausdrücke:

$$U, P\frac{\partial U}{\partial x}, P\frac{\partial U}{\partial y}, P\frac{\partial U}{\partial z}$$

mit wachsendem P gegen null konvergieren.

2. Kapitel.

Darstellung der Potentialfunktionen durch Oberflächenintegrale.

§ 1.

Es seien U, V zwei Funktionen der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, welche in dem Innenraum τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, und man wisse auch, dass ihre höheren Ableitungen innerhalb τ eindeutig und stetig sind.

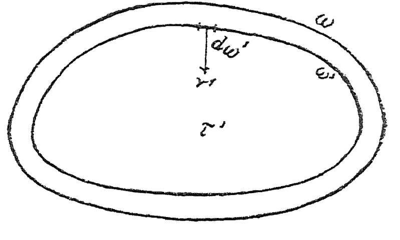


Fig. 51.

Wir denken uns einen Teil τ' des Raumes τ durch eine Fläche ω' begrenzt, welche von der Fläche ω durch irgend welche (im übrigen beliebig kleine) Entfernungen getrennt ist, und bilden das Integral:

$$2)\ J' = \int_{\tau'} \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right) d\tau'.$$

Es ist nun identisch:

$$\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(U\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial \xi^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial \eta^2},$$

$$\frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta} = \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(U\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right) - U\frac{\partial^2 V}{\partial \zeta^2},$$

so dass wir das Integral J′ auch so schreiben können:

$$J' = \int\limits_{\tau'}\left[\frac{\partial}{\partial \xi}\left(U\frac{\partial V}{\partial \xi}\right) + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(U\frac{\partial V}{\partial \eta}\right) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(U\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\right] d\tau - \int\limits_{\tau'} U \Delta V \, d\tau,$$

oder wenn man das erste Integral rechts mit Hilfe des Greenschen Theorems (S. 18) umformt:

$$\text{3a)} \quad J' = -\int\limits_{\omega'} U \frac{\partial V}{\partial \nu'} d\omega - \int\limits_{\tau'} U \Delta V \, d\tau,$$

wo das erste Integral nunmehr über alle Elemente $d\omega$ (mit den inneren Normalen ν') der Fläche ω' zu erstrecken ist. Nach 2) ist J′ in Bezug auf U und V symmetrisch, so dass wir auch in 3a) U mit V vertauschen können:

$$\text{3b)} \quad J' = -\int\limits_{\omega'} V \frac{\partial U}{\partial \nu'} d\omega - \int\limits_{\tau'} V \Delta U \, d\tau.$$

Durch Subtraktion von 3a) und 3b) folgt:

$$\text{4)} \quad \int\limits_{\omega'}\left(U\frac{\partial V}{\partial \nu'} - V\frac{\partial U}{\partial \nu'}\right) d\omega = \int\limits_{\tau'} (V \Delta U - U \Delta V) \, d\tau.$$

Sind im besonderen U und V Potentialfunktionen des Raumes τ, so ergiebt sich:

$$\int\limits_{\omega'}\left(U\frac{\partial V}{\partial \nu'} - V\frac{\partial U}{\partial \nu'}\right) d\omega = 0,$$

und, da diese Formel gilt, wie nahe wir auch die Fläche ω' an die Fläche ω herantreten lassen, so folgt aus der Eindeutigkeit

und Stetigkeit von U und V und ihrer ersten Ableitungen ihre Gültigkeit auch für den Grenzfall:

$$5)\quad \int\limits_{\omega}\left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\omega = 0.$$

Ia) Sind U und V zwei Potentialfunktionen des Innenraumes*) einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, so besteht stets die Formel;

$$\int\limits_{\omega}\left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\omega = 0.$$

Ist im besonderen:

$$V = \text{const.},$$

so folgt aus Ia) der

Zusatz zu Ia). Für jede Potentialfunktion U des Innenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω besteht die Formel:

$$6)\quad \int\limits_{\omega}\frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\omega = 0.$$

§ 2.

Es sei wieder U eine Potentialfunktion des Innenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, (xyz) irgend ein Punkt innerhalb τ. Wir konstruieren um (xyz) als Centrum eine Kugel mit dem Radius R, der klein genug ist, dass die ganze Kugel innerhalb τ liegt, es ist dann U auch eine Potentialfunktion des (in der Figur schraffierten) Gebietes, welches übrig bleibt, wenn man die Kugel (R) aus dem Raume τ ausschneidet. Bezeichnen wir andererseits mit r die Entfernung irgend eines Punktes $(\xi\eta\zeta)$ des schraffierten Gebietes von (xyz), so ist auch die Funktion:

$$7)\quad V = \frac{1}{r}$$

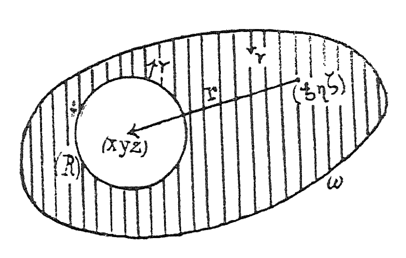


Fig. 52.

*) Der Ia) entsprechende Satz Ib) für den Aufsenraum folgt erst mit Hilfe der folgenden Sätze IIa) und IIb).

von ξ, η, ζ eine Potentialfunktion des schraffierten Gebietes. Wir bringen nun auf die beiden Potentialfunktionen U und V des schraffierten Gebietes den Satz Ia) zur Anwendung, wobei wir zu bedenken haben, dass die Oberfläche dieses Gebietes sich aus der Fläche ω und der Kugelfläche (R) zusammensetzt, und, wenn wir mit ν die inneren Normalen jenes Gebietes bezeichnen, die inneren Normalen von ω und die äufseren Normalen der Kugelfläche (R) als die Normalen ν anzusehen sind. Es folgt nach dieser Bemerkung:

$$8)\quad \left\{\begin{aligned} &\int\limits_{\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\right) d\omega \\ &+\int\limits_{(R)}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\right) d\omega = 0, \end{aligned}\right.$$

wobei, wie früher, unter r

die Entfernung und Richtung $d\omega \longrightarrow (xyz)$

zu verstehen ist.

Für Elemente $d\omega$ der Kugelfläche (R) ist nun:

$$r = R,$$
$$\cos(r\nu) = -1,$$

die Gleichung 8) geht so in die folgende über:

$$-\frac{1}{R}\int\limits_{(R)}\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\omega - \frac{1}{R^2}\int\limits_{(R)}U\,d\omega = \int\limits_{\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\right) d\omega,$$

oder, da nach Zusatz zu Ia):

$$\int\limits_{(R)}\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\omega = 0,$$

in die folgende:

$$9)\quad -\frac{1}{R^2}\int\limits_{(R)}U\,d\omega = \int\limits_{\omega}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial U}{\partial \nu} - U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\right) d\omega.$$

Diese Gleichung wird gelten, wie klein wir auch den Radius R wählen mögen, und wir erhalten im Grenzfall, da:

$$\lim_{R=0}\frac{1}{R^2}\int\limits_{(R)}U\,d\omega = 4\pi\cdot U(x, y, z)$$

(infolge der Eindeutigkeit und Stetigkeit von U):

$$10) \quad -4\pi \cdot U(x, y, z) = \int\limits_{\omega} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial U}{\partial \nu} - U \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \right) d\omega.$$

Wir erhalten den Satz:

IIa) Jede Potentialfunktion U des Innenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω ist in jedem Punkte (xyz) innerhalb τ (der auch unendlich nahe an die Oberfläche ω heranrücken darf) durch die Formel darstellbar:

$$11) \quad U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} U \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega.$$

Dabei ist ν die innere Normale von $d\omega$ und r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz)$$

§ 3.

Es sei nun U eine Potentialfunktion des Aufsenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, (xyz) irgend ein Punkt innerhalb τ. Wir konstruieren um (xyz) als Centrum eine Kugel mit dem Radius P, der grofs genug ist, dass die Fläche ω ganz innerhalb der Kugelfläche (P) liegt, es ist dann U auch eine Potentialfunktion des (in der Figur schraffierten) Gebietes, welches zwischen der Fläche ω und der Kugelfläche (P) liegt.

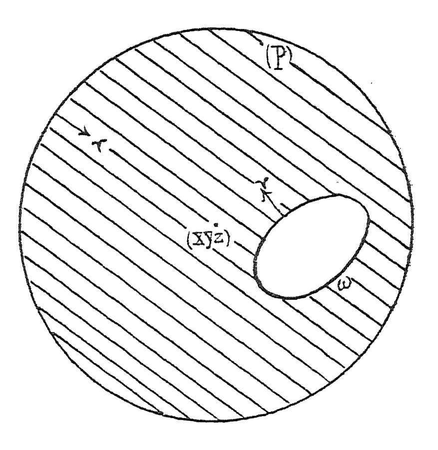


Fig. 53.

Es ist dann nach Satz IIa), wenn wir bedenken, dass die Oberfläche des schraffierten Gebietes sich aus der Fläche ω und der Kugel-

fläche (P) zusammensetzt, und, wenn wir mit ν die inneren Normalen jenes Gebietes bezeichnen, die äuſseren Normalen von ω und die inneren Normalen der Kugelfläche (P) als die Normalen ν anzusehen sind:

$$12)\quad \begin{cases} U(x,y,z) = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{\omega} \dfrac{\partial U}{\partial \nu}\,\dfrac{d\omega}{r} + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{\omega} U\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \\ \qquad -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{(P)} \dfrac{\partial U}{\partial \nu}\,\dfrac{d\omega}{r} + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{(P)} U\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega; \end{cases}$$

für Elemente $d\omega$ der Kugelfläche (P) ist nun:

$$r = P,$$
$$\cos(r\nu) = +1,$$

die Gleichung 12) geht so in die folgende über:

$$13)\quad \begin{cases} U(x,y,z) = -\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{\omega} \dfrac{\partial U}{\partial \nu}\,\dfrac{d\omega}{r} + \dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int\limits_{\omega} U\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \\ \qquad + J_1 + J_2, \end{cases}$$

wo:

$$14)\quad \begin{cases} J_1 = +\dfrac{1}{4\pi P^2}\displaystyle\int\limits_{(P)} P\,\dfrac{\partial U}{\partial P}\,d\omega, \\ J_2 = +\dfrac{1}{4\pi P^2}\displaystyle\int\limits_{(P)} U\,d\omega. \end{cases}$$

Bezeichnen wir mit G_1 den absolut gröſsten Wert von $P\dfrac{\partial U}{\partial P}$, mit G_2 den absolut gröſsten Wert von U auf der Kugelfläche (P), so ist:

$$\text{abs. } J_1 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4\pi P^2} \cdot G_1 \cdot \int\limits_{(P)} d\omega,$$
$$\overline{\overline{<}}\; G_1,$$

$$\text{abs. } J_2 \overline{\overline{<}} \frac{1}{4\pi P^2} \cdot G_2 \cdot \int\limits_{(P)} d\omega,$$
$$\overline{\overline{<}}\; G_2;$$

wir wissen nun, dass sich nach der Definition der Potentialfunktionen G_1 und G_2 durch Vergröfserung von P unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken lassen, es ist somit:

$$15)\quad \begin{cases} \lim\limits_{P=\infty} J_1 = 0, \\ \lim\limits_{P=\infty} J_2 = 0, \end{cases}$$

und es folgt aus 13):

$$16)\quad U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

IIb) Jede Potentialfunktion U des Aufsenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω ist in jedem Punkte (xyz) innerhalb τ (der auch unendlich nahe an die Oberfläche heranrücken darf) durch die Formel darstellbar:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Dabei ist ν die äufere Normale von $d\omega$ und r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz).$$

Wissen wir im besonderen, dass V an der Oberfläche ω überall konstant ist, so folgt aus IIb) mit Hilfe des Satzes IIIa) des I. Teiles der

Zusatz zu IIb). Ist im besonderen U an der Oberfläche ω überall konstant, so ist:

$$17)\quad U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}.$$

Die Sätze IIa) und IIb) machen uns mit einem Schlage mit dem Verhalten der Funktionen U bekannt; sie zeigen, dass sich die Funktionen U aus einem Flächenpotential:

$$\int\limits_{\omega}\frac{H d\omega}{r},\ \text{in dem}\ H = -\frac{1}{4\pi}\frac{\partial U}{\partial \nu},$$

und einem Flächenintegral:

$$\int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \text{ in dem } \varkappa = \frac{1}{4\pi} U,$$

zusammensetzen.

§ 4.

Aus der Formel des Satzes IIb) ergiebt sich noch, dass, wenn P die Entfernung des variabeln Punktes (xyz) von einem im Endlichen gelegenen Punkte O vorstellt, die Gröfsen:

$$U, \; P\frac{\partial U}{\partial x}, \; P\frac{\partial U}{\partial y}, \; P\frac{\partial U}{\partial z}$$

mit wachsendem P in solcher Weise zu null konvergieren, dass:

$$PU, \; P^2\frac{\partial U}{\partial x}, \; P^2\frac{\partial U}{\partial y}, \; P^2\frac{\partial U}{\partial z}$$

stets ihrem absoluten Werte nach kleiner sind als eine bestimmte endliche Konstante. Infolgedessen können wir nun den Satz Ia) auch auf den Aufsenraum einer Fläche ω ausdehnen:

Ib) Sind U und V zwei Potentialfunktionen des Aufsenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, so besteht stets die Formel:

$$18) \int\limits_{\omega} \left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\omega = 0.^{*)}$$

Es möge besonders hervorgehoben werden, dass der Zusatz zu Ia) auf den Aufsenraum nicht auszudehnen ist.

§ 5.

Es sei nun wieder U eine Potentialfunktion des Innenraumes τ einer geschlossenen Fläche ω und (xyz) irgend ein Punkt des Aufsenraumes (der von ω durch irgend welche, auch unendlich

---

*) Zum Beweise brauchen wir uns zunächst τ nur durch eine grofse Kugelfläche (P) begrenzt zu denken, es folgt dann zunächst nach Ia):

$$\int\limits_{\omega} \left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\omega + \int\limits_{(P)} \left(U\frac{\partial V}{\partial \nu} - V\frac{\partial U}{\partial \nu}\right) d\omega = 0,$$

und das zweite Integral konvergiert nach der obigen Bemerkung mit wachsendem P zur null.

kleine, Entfernung getrennt sei). Wir bezeichnen mit r die Entfernung irgend eines Punktes ($\xi\eta\zeta$) des Gebietes τ von (xyz), dann ist auch die Funktion:

$$V = \frac{1}{r}$$

von ξ, η, ζ eine Potentialfunktion des Gebietes τ, und es folgt, wenn wir auf die beiden Potentialfunktionen U und V des Gebietes τ den Satz Ia) zur Anwendung bringen:

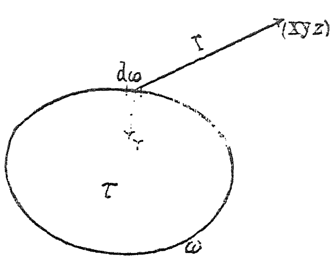


Fig. 54.

$$19) \int\limits_{\omega} \left(\frac{\partial U}{\partial \nu} \frac{1}{r} - U \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \right) d\omega = 0,$$

wenn r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz)$$

vorstellt:

IIIa) Ist U eine Potentialfunktion des Innenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, so ist für jeden Punkt (xyz) des Aufsenraumes (der von ω durch irgend welche, auch unendlich kleine, Entfernung getrennt ist):

$$20) \quad 0 = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} U \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega.$$

Dabei bezeichnet r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz).$$

In analoger Weise folgt mit Hilfe des Satzes Ib):

IIIb) Ist U eine Potentialfunktion des Aufsenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, so ist für jeden Punkt (xyz) des Innenraumes (der von ω durch irgend welche, auch unendlich kleine, Entfernung getrennt ist):

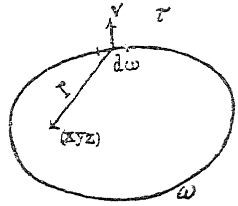


Fig. 55.

$$21) \quad 0 = -\frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} \frac{\partial U}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} U \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega;$$

dabei bezeichnet r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz).$$

§ 6.

Es sei wiederum U eine Potentialfunktion des Innenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, (xyz) irgend ein Punkt innerhalb τ (der auch an die Fläche ω unendlich nahe heranrücken darf), dann ist nach IIa):

$$22)\quad U(x,y,z) = -\frac{1}{4\pi}\int_{\omega}\frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Existiert andererseits eine Potentialfunktion W des Aufsenraumes, welche an der Fläche ω dieselben Randwerte hat, wie die Funktion U, so ist nach IIIb):

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\omega}\frac{\partial W}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} W\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

oder auch:

$$23)\quad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int_{\omega}\frac{\partial W}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_{\omega} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Subtrahieren wir 23) von 22), so folgt:

$$24)\quad U(xyz) = +\frac{1}{4\pi}\int_{\omega}\left(\frac{\partial W}{\partial \nu} - \frac{\partial U}{\partial \nu}\right)\frac{d\omega}{r},$$

wobei ν die Richtung der inneren Normalen von $d\omega$ vorstellt:

IVa) Jede Potentialfunktion U des Innenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω lässt sich als ein Flächenpotential der Fläche ω darstellen, wenn man die Existenz einer Potentialfunktion W des Aufsenraumes nachweisen kann, deren Randwerte an der Fläche ω mit den Randwerten von U übereinstimmen.

Analog folgt mit Hilfe der Sätze IIIa) und IIb):

IVb) Jede Potentialfunktion U des Aufsenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω lässt sich als ein Flächenpotential der Fläche ω darstellen, wenn man die Existenz einer Potentialfunktion W des Innenraumes nachweisen kann, deren Randwerte an der Fläche ω mit den Randwerten von U übereinstimmen.

§ 7.

Es sei wiederum U eine Potentialfunktion des Innenraumes τ einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, (xyz) irgend ein Punkt innerhalb τ (der auch an die Fläche ω unendlich nahe heranrücken darf), dann ist nach IIa):

$$25)\quad U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\omega U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Existiert andererseits eine Potentialfunktion V des Aufsenraumes, welche an der Fläche ω in der Richtung der inneren Normalen ν dieselben Ableitungen hat, wie die Funktion U, so ist nach IIIb):

$$0 = -\frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial V}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\omega V\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

oder auch:

$$26)\quad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\omega V\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Subtrahieren wir 26) von 25), so folgt:

$$27)\quad U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi}\int_\omega (U - V)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

wobei ν die Richtung der inneren Normalen von $d\omega$ vorstellt:

Va) Jede Potentialfunktion U des Innenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω lässt sich als ein Flächenintegral von der Form:

$$\int_\omega \varkappa\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

darstellen, wenn man die Existenz einer Potentialfunktion V des Aufsenraumes nachweisen kann, deren normale Ableitungen an der Fläche ω mit den normalen Ableitungen der Funktion U übereinstimmen.

Analog folgt mit Hilfe der Sätze IIb) und IIIa):

Vb) Jede Potentialfunktion U des Aufsenraumes

einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω lässt sich als ein Flächenintegral von der Form:

$$\int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

darstellen, wenn man die Existenz einer Potentialfunktion V des Innenraumes nachweisen kann, deren normale Ableitungen an der Fläche ω mit den normalen Ableitungen der Funktion U übereinstimmen.

II. Abschnitt.

Die Flächenpotentiale V und die Flächenintegrale W einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω als Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes.

1. Kapitel.

Die Flächenpotentiale V der Fläche ω als Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes.

§ 1.

Wir können den folgenden Satz aussprechen:

VIa) Das Flächenpotential:

$$28)\quad V = \int_{\omega} \frac{H d\omega}{r}$$

einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω ist eine Potentialfunktion des Innen- und Aufsenraumes von ω, wenn H auf ω eindeutig und stetig ist und endliche erste Ableitungen hat.

Es folgt dies ohne weiteres aus den Sätzen Va), Vb), Ia) bis Ic) des I. Teiles.

§ 2.

Es lässt sich zeigen, dass, obwohl die zweiten Ableitungen von V im allgemeinen an der Fläche ω nur dann endlich sind, wenn wir noch die Annahme der Endlichkeit der zweiten Ableitungen von H hinzunehmen, dennoch die tangentialen Ableitungen von $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ an der Fläche ω bereits bei den Voraussetzungen des Satzes VIa) stets endlich bleiben. Wir werden uns, um dies zu zeigen, des folgenden Hilfssatzes bedienen.

Hilfssatz. Die normalen Ableitungen des Flächenintegrales einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω:

$$V = \int_{\omega} \frac{H d\omega}{r}$$

sind stets endlich, wenn man lediglich die Eigenschaft der Endlichkeit von H voraussetzt.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes sei $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ irgend ein Punkt der Aufsen- oder Innenseite von ω, ν_0 die äufsere oder innere Flächennormale in demselben, dann ist:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)} = - \left| \int_{\omega} \frac{H \cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega \right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)} ;$$

nun ist in einem endlichen Gebiete ω_1 um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$:

$$\cos(r\nu_0) = \cos(r\nu) + r \cdot f,$$

wo f eine in diesem Gebiete endliche Funktion vorstellt.

Es wird somit:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)} = - \int_{\omega - \omega_1} \frac{H \cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega - \int_{\omega_1} \frac{H \cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

$$- \int_{\omega_1} \frac{H f}{r} d\omega,$$

daraus folgt die Behauptung.

Nachdem wir so den Hilfssatz bewiesen haben, gehen wir zu unserer eigentlichen Aufgabe über und machen wieder die Voraussetzungen des Satzes VIa), dass H auf ω eindeutig und stetig sei und endliche erste Ableitungen habe.

Ist h eine beliebige Richtung, so folgt aus der Formel 54) des I. Teiles (S. 42) bei unseren Voraussetzungen:

$$29)\quad \left| \begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial h} &= \int\limits_\omega \frac{\frac{\partial H}{\partial h} - H\cos(\nu h)\,(f_{11}+f_{22}+f_{33})^{*)}}{r}\,d\omega \\ &\quad - \int\limits_\omega H\cos(\nu h)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega. \end{aligned} \right.$$

Differenzieren wir noch einmal nach der in $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$ zur Fläche normalen Richtung ν_0, so bleibt der Differentialquotient des ersten Integrales rechts nach dem Hilfssatz endlich, bei beliebiger Wahl der Richtung h, es bleibt daher nur der Beweis übrig, dass:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0}\int\limits_\omega H\cos(\nu h)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

endlich ist, wenn h eine tangentiale Richtung vorstellt. Nun ist nach der Formel 59) des I. Teiles (S. 46):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\int\limits_\omega H\cos(\nu h)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega &= \int\limits_\omega \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(H\cos(\nu h)\Big)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \\ &\quad - \int\limits_\omega \cos(\nu x)\left\{\frac{\partial\Big(H\cos(\nu h)\Big)}{\partial \xi}\,\frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial\Big(H\cos(\nu h)\Big)}{\partial \eta}\,\frac{\cos(ry)}{r^2}\right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\Big(H\cos(\nu h)\Big)}{\partial \zeta}\,\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\}d\omega, \end{aligned}$$

---

*) $f_{11}+f_{22}+f_{33} = \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\cos(\nu x)\Big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\cos(\nu y)\Big) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big(\cos(\nu z)\Big)$.

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_\omega H\cos(\nu h)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega=\int_\omega\frac{\partial}{\partial\eta}\Big(H\cos(\nu h)\Big)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

$$-\int_\omega\cos(\nu y)\left\{\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\xi}\frac{\cos(rx)}{r^2}+\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\eta}\frac{\cos(ry)}{r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\}d\omega,$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_\omega H\cos(\nu h)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega=\int_\omega\frac{\partial}{\partial\zeta}\Big(H\cos(\nu h)\Big)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

$$-\int_\omega\cos(\nu z)\left\{\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\xi}\frac{\cos(rx)}{r^2}+\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\eta}\frac{\cos(ry)}{r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\}d\omega.$$

Die jeweils ersten Integrale rechts in diesen Formeln sind endlich (nach IVa) des I. Teiles), es bleibt daher, da man in einem endlichen Gebiete um $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$

$$\cos(\nu\nu_0)=1+r\cdot\psi$$

setzen kann, wo ψ stets endlich ist, nur übrig zu zeigen, dass:

$$\int_\omega\left[\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\xi}\frac{\cos(rx)}{r^2}+\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\eta}\frac{\cos(ry)}{r^2}\right.$$

$$\left.+\frac{\partial\big(H\cos(\nu h)\big)}{\partial\zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right]d\omega$$

in $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ endlich ist, wenn h eine tangentiale Richtung vorstellt. Dieses Integral zerfällt in zwei Teile:

$$\int_\omega\cos(\nu h)\left\{\frac{\partial H}{\partial\xi}\frac{\cos(rx)}{r^2}+\frac{\partial H}{\partial\eta}\frac{\cos(ry)}{r^2}+\frac{\partial H}{\partial\zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\}d\omega,$$

das stets endlich bleibt, da in einem endlichen Gebiete um $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$:

$$\cos(\nu h)=r\cdot\chi,$$

wo χ stets endlich ist, und:

$$\int\limits_{\omega} \frac{H}{r^2} \Big[\{ f_{11} \cos(hx) + f_{12} \cos(hy) + f_{13} \cos(hz) \} \cos(rx) + \{ f_{21} \cos(hx) + f_{22} \cos(hy) + f_{23} \cos(hz) \} \cos(ry) + \{ f_{31} \cos(hx) + f_{32} \cos(hy) + f_{33} \cos(hz) \} \cos(rz) \Big] d\omega,$$

das gleichfalls nach V b) des I. Teiles stets endlich ist, falls die zweiten Ableitungen von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ endlich sind.*)

Wir haben somit den folgenden Zusatz zu dem Satze VIa) erhalten:

Zusatz zu VIa). Die tangentiellen Ableitungen von $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ an der Fläche ω bleiben unter den in VIa) über H gemachten Voraussetzungen stets endlich, wenn die Richtungskosinusse der Normalen von ω überall eindeutige und stetige erste und endliche zweite Ableitungen haben. Für die Endlichkeit aller zweiten Ableitungen von V an der Fläche ω muss im allgemeinen die Voraussetzung hinzugenommen werden, dass aufser der Eindeutigkeit und Stetigkeit der ersten Ableitungen von H auch die Endlichkeit ihrer zweiten Ableitungen gesichert sei.

2. Kapitel.

Die Flächenintegrale W der Fläche ω als Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes.

§ 1.

Wir können den folgenden Satz aussprechen:

VIb) Das Flächenintegral:

$$30) \quad W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

---

*) Es braucht — was beiläufig bemerkt sein möge — nur:

$$f_{11} + f_{22} + f_{33}$$

endliche erste Ableitungen haben.

einer geschlossenen stetig gekrümmten Fläche ω ist eine Potentialfunktion des Innen- und Aufsenraumes, wenn $\varkappa$ auf ω mit seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

Es folgt dies ohne weiteres aus IVb), IVc) und Ia) bis Ic) des I. Teiles.

§ 2.

Es lässt sich zeigen, dass, obwohl die zweiten Ableitungen von W an der Fläche ω im allgemeinen nur bei Hinzunahme der Eindeutigkeit und Stetigkeit der zweiten und der Endlichkeit der dritten Ableitungen von $\varkappa$ endlich bleiben, dennoch die zweiten tangentialen Ableitungen von W bereits bei den Voraussetzungen des Satzes VIb) endlich sind.

Wir werden, um dies zu zeigen, von dem folgenden Hilfssatze Gebrauch machen:

Hilfssatz. Die tangentialen Ableitungen des Flächenintegrales einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω

$$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Fläche ω sind endlich, falls wir lediglich voraussetzen, dass $\varkappa$ auf ω eindeutig und stetig ist und endliche erste Ableitungen hat.

Zum Beweise dieses Hilfssatzes sei $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ irgend ein Punkt der Fläche ω (an der Aufsen- oder Innenseite), h irgend eine tangentiale Richtung in demselben, dann ist nach Formel 59) des I. Teiles:

$$31) \quad \frac{\partial W}{\partial h} = \int\limits_{\omega} \frac{\partial \varkappa}{\partial h} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$
$$- \int\limits_{\omega} \cos(\nu h) \left\{ \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega.$$

Das erste Integral rechts ist stets endlich, wenn die ersten Ableitungen von $\varkappa$ endlich sind, um dasselbe für das zweite

Integral zu ersehen, hat man nur zu bedenken, dass man um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein endliches Flächenstück ω_1 abscheiden kann, auf dem sich $\cos(\nu h)$ in der Form entwickeln lässt:

$$\cos(\nu h) = r \cdot f,$$

wo f eine stets endliche Funktion vorstellt. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

Wir gehen nun zu unserer eigentlichen Aufgabe über und nehmen wieder von H, wie in VIb) an, dass es mit seinen ersten Ableitungen auf ω eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat. Wir können dann die Formel 31) umformen, indem wir auf die in dem zweiten Integrale rechts vorkommenden Ableitungen von Flächenpotentialen die Formel 54) des I. Teiles in Anwendung bringen; es ist nach dieser:

$$-\int_\omega \cos(\nu h)\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\frac{\cos(rx)}{r^2}\,d\omega$$

$$= \int_\omega \frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi}\left(\cos(\nu h)\dfrac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\right) - \dfrac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(\nu h)\cos(\nu x)\,(f_{11}+f_{22}+f_{33})}{r}\,d\omega$$

$$-\int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi}\cos(\nu h)\cos(\nu x)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

$$-\int_\omega \cos(\nu h)\frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\frac{\cos(ry)}{r^2}\,d\omega$$

$$= \int_\omega \frac{\dfrac{\partial}{\partial \eta}\left(\cos(\nu h)\dfrac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\right) - \dfrac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(\nu h)\cos(\nu y)\,(f_{11}+f_{22}+f_{33})}{r}\,d\omega$$

$$-\int_\omega \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}\cos(\nu h)\cos(\nu y)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

$$-\int\limits_{\omega}\cos(\nu h)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\,d\omega$$

$$=\int\limits_{\omega}\frac{\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\cos(\nu h)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\right)-\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\cos(\nu h)\cos(\nu z)(f_{11}+f_{22}+f_{33})}{r}\,d\omega$$

$$-\int\limits_{\omega}\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\cos(\nu h)\cos(\nu z)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

somit können wir 31) folgendermaſsen schreiben:

$$32)\quad\left\{\begin{aligned}\frac{\partial W}{\partial h}&=\int\frac{\partial\varkappa}{\partial h}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega+\int\limits_{\omega}\cos(\nu h)\frac{\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\eta^2}+\frac{\partial^2\varkappa}{\partial\zeta^2}}{r}\,d\omega\\&+\int\left\{\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\cos(\nu h)\right)\frac{\partial\varkappa}{\partial\xi}+\frac{\partial}{\partial\eta}\left(\cos(\nu h)\right)\frac{\partial\varkappa}{\partial\eta}+\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\cos(\nu h)\right)\frac{\partial\varkappa}{\partial\zeta}\right\}\frac{d\omega}{r}.\end{aligned}\right.$$

Differenzieren wir nochmals nach einer tangentialen Richtung h', so wird die Ableitung des ersten Integrales nach dem Hilfssatze endlich sein, die des zweiten Integrales, weil in einem endlichen Gebiete ω_1 um $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ $\cos(\nu h)$ in der Form entwickelbar ist:

$$\cos(\nu h)=r\cdot f,$$

wo f eine stets endliche Funktion vorstellt, und die des dritten Integrales nach Vb) des I. Teiles.

Wir haben somit den folgenden Zusatz zu VIb) erhalten:

Zusatz zu VIb). Die zweiten tangentiellen Ableitungen von W an der Fläche ω bleiben unter den in VIb) über $\varkappa$ gemachten Voraussetzungen stets endlich, wenn die Richtungskosinusse der Normalen von ω überall eindeutige und stetige erste und endliche zweite Ableitungen haben.*) Für die Endlichkeit aller zweiten Ableitungen von W an der Fläche ω muss im allgemeinen die Voraussetzung hinzugenommen werden, dass auſser der Eindeutigkeit und Stetigkeit der zweiten Ableitungen von $\varkappa$ auch die Endlichkeit ihrer dritten Ableitungen gesichert sei.

---

*) Vgl. Anm. S. 196.

III. Abschnitt.

Maximal- und Minimal-Eigenschaften der Potentialfunktionen.

1. Kapitel.

Die Lage der Maxima und Minima einer Potentialfunktion.

§ 1.

Nach IIa) und IIb) lässt sich jede Potentialfunktion U für jeden Punkt (xyz) ihres Gebietes τ durch die Gleichung darstellen:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

wobei ν die in das Gebiet τ hineingehende Normale von $d\omega$ vorstellt.

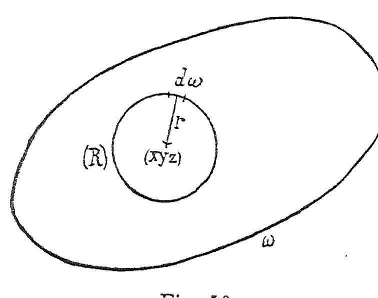


Fig. 56.

Wir denken uns wieder um (xyz) als Centrum eine Kugel mit dem Radius R, der klein genug ist, dass die ganze Kugel innerhalb τ liegt. Es ist dann U auch eine Potentialfunktion des Kugelraumes; wenn wir auf diese die soeben angegebene Formel anwenden, so folgt:

$$U(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{(R)}\frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{(R)} U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

wo ν die innere Kugelnormale vorstellt. Nun ist hier:

$$r = R,$$

$$\cos(r\nu) = 1,$$

somit folgt, da nach Zusatz zu Ia):

$$\int\limits_{(R)}\frac{\partial U}{\partial \nu}\,d\omega = 0$$

ist:

$$33)\quad U(x, y, z) = \frac{1}{4\pi R^2} \int_{(R)} U\, d\omega.$$

Man spricht diesen Satz gewöhnlich in der Form aus:

VII. (Gaufsscher Satz des arithmetischen Mittels.) Der Wert einer Potentialfunktion U einer Kugel in derem Centrum ist gleich dem arithmetischen Mittel ihrer Randwerte:

$$U(x, y, z) = \frac{\int_{(R)} U\, d\omega}{\int_{(R)} d\omega}.$$

§ 2.

Es ergiebt sich aus VII unmittelbar der folgende wichtige Zusatz über die Lage der Maxima und Minima einer Potentialfunktion:

Zusatz 1 zu VII. Die Maximal- und Minimalwerte einer Potentialfunktion U eines Gebietes τ können sich nur auf der Grenze desselben vorfinden, falls nicht überhaupt U in dem ganzen Gebiete τ konstant ist. Bei Potentialfunktionen des Aufsenraumes einer Fläche ω ist dabei zu der Grenze die unendlich ferne Kugelfläche hinzuzurechnen.

Nehmen wir nämlich an, es habe U in einem Punkte (xyz) innerhalb τ z. B. ein Maximum; wir können dann um (xyz) als Centrum eine Kugel mit einem Radius R schlagen, der nur der Bedingung genüge, dass die Kugel ganz in dem Raum τ liege.

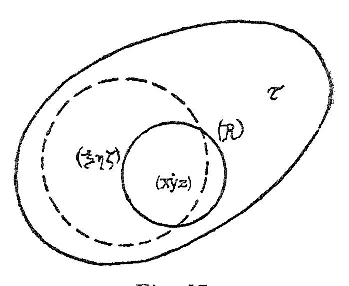


Fig. 57.

Es wird bei unserer Voraussetzung für jeden Punkt ($\xi\eta\zeta$) der Oberfläche der Kugel die Ungleichung stattfinden:

$$U(\xi, \eta, \zeta) \overline{\lessgtr} U(x, y, z),$$

somit auch:

$$\int\limits_{(R)} U(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega \lesseqgtr 4\pi R^2 U(x, y, z),$$

und zwar kann das Gleichheitszeichen nur stehen, wenn alle Werte von U auf der Kugel = U(x, y, z) sind. Nun besteht aber die Gleichung:

$$\int\limits_{(R)} U(\xi, \eta, \zeta)\, d\omega = 4\pi R^2 U(x, y, z)$$

thatsächlich nach VII, es müssen also alle Werte von U auf der Kugel = U(x, y, z) sein, d. h. es folgt, bei der Willkürlichkeit von R, es muss U in der Kugel konstant sein.

War U(x, y, z) ein Maximalwert von U, so müssen auch alle Werte $U(\xi, \eta, \zeta)$ Maximalwerte von U sein; konstruieren wir daher wieder um irgend einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Kugelfläche eine neue Kugel, die ganz in dem Gebiete τ liegt, so muss U in dieser wiederum konstant = U(x, y, z) sein und so fort; d. h. es muss U im ganzen Gebiete τ konstant sein.

Wir erhielten das gleiche Resultat, wenn wir in (xyz) ein Minimum von U angenommen hätten. Damit ist der Zusatz 1 zu VII bewiesen.

Bezeichnen wir nun mit K den kleinsten, mit G den gröfsten Wert von U an der Grenze, so ist nach dem Zusatz 1 zu VII im ganzen Raume τ:

$$34)\quad K \lesseqgtr U \lesseqgtr G.$$

Ist im besonderen $K = G$, so ist hiernach im ganzen Raume τ:

$$35)\quad U = K = G.$$

Wir erhalten so die beiden Sätze:

Zusatz 2 zu VII. Ist eine Potentialfunktion an der Grenze konstant, so hat sie diesen konstanten Wert in ihrem ganzen Gebiete τ.

Zusatz 3*) zu VII. Wissen wir von zwei Potentialfunktionen eines Gebietes τ, dass sie überall an der

*) Dieses Resultat werden wir später (S. 206) noch auf einem anderen Wege gewinnen und als einen besonderen Satz (IXa) aussprechen.

Grenze gleich sind, so müssen dieselben im ganzen Gebiete τ übereinstimmen.

Endlich wollen wir aus Zusatz 1 zu VII noch den folgenden Schluss ziehen:

Zusatz 4 zu VII. Ist K der kleinste, G der gröfste Wert einer Potentialfunktion U eines Gebietes τ an der Grenze, so wird, falls:

$$36)\quad K < G \text{ (im strengen Sinne)},$$

innerhalb des Gebietes τ stets die Ungleichung erfüllt sein:

$$37)\quad K < U < G \text{ (im strengen Sinne)}.$$

Wäre nämlich in irgend einem Punkte innerhalb τ wirklich:

$$U = K \text{ oder } U = G,$$

so würde U in diesem Punkte ein Minimum oder ein Maximum haben, und daraus würde wieder folgen, dass U überall in dem Gebiete τ konstant, also $K = G$ sein muss.

2. Kapitel.

Das Minimum des Integrales

$$\int_\tau \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right] d\tau.$$

§ 1.

Es sei τ der Innen- oder Aufsenraum einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω und F eine Funktion der Stelle $(\xi\eta\zeta)$, welche in dem Gebiete τ alle Eigenschaften einer Potentialfunktion haben soll mit der Ausnahme, dass sie nicht der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial \zeta^2} = 0$$

zu genügen braucht, und welche an der Fläche ω irgend welche vorgeschriebene Randwerte f annimmt.

Wir untersuchen das Integral:

$$38)\quad T_F = \int_\tau \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right] d\tau.$$

§ 2.

Wir nehmen an, wir kennen eine Potentialfunktion U des Gebietes τ, die an der Fläche ω die vorgeschriebenen Werte f annimmt, und setzen:

$$39)\quad F = U + U';$$

dann hat die Funktion U′ in dem Gebiete τ wieder alle Eigenschaften einer Potentialfunktion, mit der Ausnahme, dass sie nicht der Gleichung:

$$\frac{\partial^2 U'}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2 U'}{\partial \zeta^2} = 0$$

zu genügen braucht, und sie hat an der Fläche ω die Werte null.

Das Integral 38) geht durch die Substitution 39) über in:

$$T_F = T_U + T_{U'} + 2\int\limits_\tau \left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial U'}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial U'}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial U'}{\partial \zeta}\right) d\tau,$$

$$= T_U + T_{U'} - 2\int\limits_\tau U' \Delta U \, d\tau - 2\int\limits_\omega U' \frac{\partial U}{\partial \nu} d\omega,$$

mit Hilfe einer Umformung nach dem Greenschen Theorem, wobei ν die in das Gebiet τ hineingehende Normale von $d\omega$ vorstellt. Nun ist

$$\Delta U = 0 \text{ in dem Gebiete } \tau,$$
$$U' = 0 \text{ an der Fläche } \omega,$$

es folgt somit:

$$40)\quad T_F = T_U + T_{U'},$$

und da $T_{U'}$ stets positiv ist:

$$41)\quad T_F \gtrless T_U.$$

Wir haben so das folgende Resultat erhalten:

VIII. Ist U eine Potentialfunktion eines Gebietes τ und F irgend eine Funktion der Stelle desselben Gebietes, welche an der Fläche ω dieselben Randwerte hat, wie U, und alle Eigenschaften einer Potentialfunktion besitzt mit der Ausnahme, dass sie nicht der Laplaceschen Differentialgleichung zu genügen braucht, so ist stets:

$$42)\quad \int_\tau \left[\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta}\right)^2\right] d\tau \lesseqgtr \int_\tau \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right] d\tau,$$

also ein Minimum der Integrale:

$$T_F \equiv \int_\tau \left[\left(\frac{\partial F}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \zeta}\right)^2\right] d\tau.$$

IV. Abschnitt.

Die beiden Hauptprobleme und ihre Behandlung für den Innen- und Aufsenraum einer Kugelfläche.

---

1. Kapitel.

Die beiden Hauptprobleme und ihre Eindeutigkeit.

§ 1.

Bei fast allen Problemen der Potentialtheorie handelt es sich darum, eine Potentialfunktion des Innen- oder Aufsenraumes einer geschlossenen Fläche ω zu bestimmen, welche an der Fläche ω bestimmt vorgeschriebene Grenzbedingungen erfüllt; von diesen Problemen sind nun die beiden folgenden die wichtigsten:

1. Das elektrostatische Problem.

Es soll die Potentialfunktion eines Gebietes τ (des Aufsenraumes oder Innenraumes einer geschlossenen stetig gekrümmten Fläche ω) gefunden werden, welche an seiner Grenze vorgeschriebene Werte annimmt.

2. Das hydrodynamische Problem.

Es soll die Potentialfunktion eines Gebietes τ (des Aufsenraumes oder Innenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω) gefunden werden, deren normale Ableitungen an seiner Grenze vorgeschriebene Werte annehmen.

§ 2.

Wir haben die beiden Hauptprobleme bereits in einer Form gestellt, in der bereits ihre Eindeutigkeit anticipiert wird, als ob nur eine einzige Potentialfunktion vorgeschriebene Werte resp. vorgeschriebene normale Ableitungen haben könnte. Wir werden aber diese Eindeutigkeit auch thatsächlich zeigen, indem wir die folgenden Sätze beweisen:

IXa) Sind U_1 und U_2 zwei Potentialfunktionen eines Gebietes τ, für welche an der Grenze überall:

$$V_1 = V_2,$$

so ist im ganzen Gebiete τ:

$$V_1 = V_2.$$

IXb) Sind U_1 und U_2 zwei Potentialfunktionen eines Gebietes τ, für welche an der Grenze überall:

$$\frac{\partial V_1}{\partial \nu} = \frac{\partial V_2}{\partial \nu},$$

so ist im ganzen Gebiete τ:

$$V_1 = V_2 + C,$$

wo C eine Konstante vorstellt, die für einen Aufsenraum τ gleich null, für einen Innenraum τ ganz beliebig ist.

Zum Beweise dieser beiden Sätze gehen wir von der aus dem Greenschen Theorem folgenden Formel:

$$43)\quad \int\limits_{\tau}\left(\frac{\partial U}{\partial \xi}\frac{\partial V}{\partial \xi} + \frac{\partial U}{\partial \eta}\frac{\partial V}{\partial \eta} + \frac{\partial U}{\partial \zeta}\frac{\partial V}{\partial \zeta}\right) d\tau = -\int\limits_{\omega} U \frac{\partial V}{\partial \nu}\, d\omega$$

aus, die für zwei beliebige Potentialfunktionen U, V des Gebietes τ gilt. (Man vergleiche S. 182.)

Es seien nun U_1 und U_2 zwei Potentialfunktionen des Gebietes τ, dann folgt gleiches für die Funktion $U_1 - U_2$, und wir setzen in 43):

$$44)\quad U = V = U_1 - U_2,$$

dann ergiebt sich:

$$45)\quad \begin{cases} \int\limits_{\tau}\left[\left\{\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \xi}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \eta}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \zeta}\right\}^2\right] d\tau \\ \qquad = -\int\limits_{\omega}(U_1 - U_2)\left(\frac{\partial U_1}{\partial \nu} - \frac{\partial U_2}{\partial \nu}\right) d\omega. \end{cases}$$

Ist nun überall an der Grenze:

$$U_1 = U_2,$$

oder:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \frac{\partial U_2}{\partial \nu},$$

so folgt aus 45):

$$46)\quad \int\limits_{\tau}\left[\left\{\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \xi}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \eta}\right\}^2 + \left\{\frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \zeta}\right\}^2\right] d\tau = 0.$$

Links steht eine Summe von lauter positiven Gliedern, sie kann also nur verschwinden, wenn ihre Summanden einzeln null sind, folglich ist:

$$47)\quad \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \xi} = \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \eta} = \frac{\partial (U_1 - U_2)}{\partial \zeta} = 0$$

oder:

$$48)\quad U_1 = U_2 + \text{const.}$$

im ganzen Gebiete τ.

Ist an der Grenze überall:

$$U_1 = U_2,$$

so muss die additive Konstante null sein, desgleichen, falls U_1 und U_2 Potentialfunktionen eines Aufsenraumes sind und an der Grenze überall

$$\frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \frac{\partial U_2}{\partial \nu}$$

ist, da sowohl U_1 als auch U_2 im Unendlichen null sein müssen. Sind dagegen U_1 und U_2 Potentialfunktionen eines Innenraumes, so bleibt bei der Grenzbedingung

$$\frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \frac{\partial U_2}{\partial \nu}$$

die Konstante in der Formel 48) beliebig.

§ 3.

Wir wollen aus dem Satze IXa) noch einige Folgerungen ziehen:

Die erste ist der nach IXa) unmittelbar einleuchtende Zusatz:

Zusatz 1 zu IXa). Es existiert aufser der Null keine Potentialfunktion des unendlichen Raumes.

Es folgt analog dem Beweise von IXa) und IXb) weiter([42]):

Zusatz 2 zu IXa). Es sei U eine Funktion der Stelle des unendlichen Raumes, welche im Innern einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω den Charakter einer Potentialfunktion des Innenraumes, aufsen den Charakter einer Potentialfunktion des Aufsenraumes habe, und es sei für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche ω:

$$49)\quad U_i - U_a = \varkappa(\xi, \eta, \zeta),$$

wenn man mit U_i resp. U_a die inneren und äufseren Randwerte von U an der Fläche ω, mit $\varkappa$ eine gegebene eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf ω bezeichnet, während die ersten Ableitungen von U bei dem Durchgange durch ω stetig bleiben. Es ist:

$$50)\quad U = W \equiv \frac{1}{4\pi}\int_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \quad (\nu \text{ innere Normale von } d\omega),$$

die einzige Funktion, die den genannten Bedingungen entsprechen kann.

Zusatz 3 zu IXa). Es sei U eine Funktion der Stelle des unendlichen Raumes, welche im Innern einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω den Charakter einer Potentialfunktion des Innenraumes, aufsen den Charakter einer Potentialfunktion des Aufsenraumes habe, und es sei für jeden Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche ω:

$$51)\quad \left|\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_a - \left|\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_i = H(\xi, \eta, \zeta), \quad (\nu \text{ innere Normale von } d\omega),$$

wenn man mit $\left|\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_i$ resp. $\left|\frac{\partial U}{\partial \nu}\right|_a$ die normalen Ableitungen von U an der Innen- und Aufsenseite von ω, H eine eindeutige und stetige und mit seinen ersten Ab-

leitungen endliche Funktion der Stelle auf ω bezeichnet, während U selbst bei dem Durchgange durch ω stetig bleibt. Es ist:

$$52)\quad U = V \equiv \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

die einzige Funktion, die den genannten Bedingungen entsprechen kann.

2. Kapitel.

Behandlung der beiden Hauptprobleme für den Innen- und Aufsenraum einer Kugelfläche.

§ 1.

Es sei f eine Funktion der Stelle auf einer Kugelfläche mit dem Radius R; wir setzen voraus, dass dieselbe auf der Kugelfläche überall eindeutig und stetig ist. Wir suchen die beiden folgenden Probleme zu lösen:

1. Die Potentialfunktion U des Innen- oder Aufsenraumes der Kugelfläche zu finden, welche an der Kugelfläche die vorgeschriebenen Werte:

$$53)\quad U = f$$

annimmt.

2. Die Potentialfunktion U des Innen- oder Aufsenraumes der Kugelfläche zu finden, welche an der Kugelfläche die vorgeschriebenen normalen Ableitungen:

$$54)\quad \frac{\partial U}{\partial \nu} = f$$

annimmt, wobei wir unter ν jetzt stets die inneren Normalen der Kugelfläche verstehen wollen.

§ 2.

Wir behandeln zunächst das erstere, das elektrostatische Problem für den einfachen Fall, dass die Funktion f eine allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung ist:

$$55)\quad f = f_n\,(a, b, c).^{*})$$

*) Wir bezeichnen mit a, b, c wie früher für einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ der Kugelfläche die Richtungskosinusse der Richtung:

Kugelcentrum $\longrightarrow (\xi\eta\zeta)$.

In diesem Falle können wir sofort die Lösung des elektrostatischen Problems angeben:

Xa) Die Potentialfunktion U des Innenraumes, welche an der Kugelfläche (R) die Werte einer allgemeinen Kugelfunktion nter Ordnung annimmt:

$$56)\quad U = f_n(a, b, c),$$

ist:

$$57)\quad U_i(x, y, z) = f_n\left(\cos(r_1 x), \cos(r_1 y), \cos(r_1 z)\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

wenn r_1 die Entfernung und Richtung

Kugelcentrum ⟶ (xyz)

vorstellt.

Die Potentialfunktion U des Aufsenraumes, welche an der Kugelfläche (R) die Werte einer allgemeinen Kugelfunktion nter Ordnung annimmt:

$$58)\quad U = f_n(a, b, c),$$

ist:

$$59)\quad U_a(x, y, z) = f_n\left(\cos(r_1 x), \cos(r_1 y), \cos(r_1 z)\right)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},$$

wenn r_1 wiederum die Entfernung und Richtung:

Kugelcentrum ⟶ (xyz)

vorstellt.

Die Funktionen 57) und 59) haben alle Eigenschaften von Potentialfunktionen und nehmen an der Kugelfläche, also für:

$$r_1 = R$$

thatsächlich die Werte:

$$f_n(a, b, c)$$

an.

§ 3.

Wir können die Lösungen 57) und 59) noch etwas anders schreiben:

$$60)\quad U_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} f_n \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega - \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(R)} f_n \frac{d\omega}{r};$$

$$61)\quad U_a = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} f_n \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(R)} f_n \frac{d\omega}{r};$$

es hat nämlich nach VIIIb) des II. Teiles das Integral:

$$62)\quad W = \int_{(R)} f_n \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

für innere resp. äufsere Punkte (xyz) die Werte:

$$63)\quad W_i = 4\pi \frac{n+1}{2n+1} f_n\left(\cos(r_1 x), \cos(r_1 y), \cos(r_1 z)\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

$$64)\quad W_a = -4\pi \frac{n}{2n+1} f_n\left(\cos(r_1 x), \cos(r_1 y), \cos(r_1 z)\right)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1};$$

und es hat nach VIIIa) des II. Teiles das Integral:

$$65)\quad V = \int_{(R)} f_n \frac{d\omega}{r}$$

für innere resp. äufsere Punkte (xyz) die Werte:

$$66)\quad V_i = 4\pi R \frac{1}{2n+1} f_n\left(\cos(r_1 x),\ \cos(r_1 y),\ \cos(r_1 z)\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

$$67)\quad V_a = 4\pi R \frac{1}{2n+1} f_n\left(\cos(r_1 x),\ \cos(r_1 y),\ \cos(r_1 z)\right)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1}.$$

Setzt man die Werte 63) und 66) in 60) und die Werte 64) und 67) in 61) ein, so gehen die Formeln 60) und 61) in die früheren 57) und 59) über.

Wir können nun nach Zusatz 2 zu VI des II. Teiles jede Funktion f der Stelle ($\xi\eta\zeta$), welche den Bedingungen des Satzes Va) (der Sätze Vb oder Vc) genügt, in eine nach Kugelfunktionen fortschreitende Reihe entwickeln, und es werden daher die Potentialfunktionen des Aufsen- und Innenraumes, die an der Kugelfläche die Werte f annehmen, nach 60), 61) darstellbar sein resp. durch die Formeln:

$$68)\quad U_i = \frac{1}{2\pi}\int_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{4\pi R}\int_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

$$69)\quad U_a = -\frac{1}{2\pi}\int_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \frac{1}{4\pi R}\int_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

falls diese Funktionen alle Eigenschaften von Potentialfunktionen besitzen.

Das Resultat ist natürlich wieder nur dann streng, falls die Integrale:

$$\int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r} \quad \text{und} \quad \int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

die Eigenschaften von Funktionen besitzen, die sich nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickeln lassen, also in jedem Falle nach Zusatz zu Va) des II. Teiles und Vb), IVc) des I. Teiles, wenn f mit seinen ersten Ableitungen auf (R) eindeutig und stetig und mit seinen zweiten Ableitungen endlich ist.

Nach VIa) und VIb) haben nun U_i und U_a auch die Eigenschaften von Potentialfunktionen, falls f mit seinen ersten Ableitungen auf (R) eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

Wir gelangen so zu dem Resultate:

Zusatz zu Xa). Die Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes einer Kugelfläche (R), welche an der Kugelfläche gegebene Werte f annehmen, sind:

$$U_i = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega - \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

$$U_a = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

falls f mit seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

Mit Hilfe der Methode von C. Neumann, die wir im IV. und V. Teile wesentlich verallgemeinert betrachten werden, lässt sich die Existenz der Potentialfunktionen U_i und U_a unter viel allgemeineren Bedingungen beweisen.

§ 4.

Wir behandeln nun auch das hydrodynamische Problem für den einfachen Fall, dass die Funktion f, der die normale Ableitung der gesuchten Potentialfunktion U an der Kugelfläche gleich werden soll, eine allgemeine Kugelfunktion nter Ordnung ist

Wir können dann auch sofort die Lösung des hydrodynamischen Problems angeben:

Xb) Die Potentialfunktion des Innenraumes, welche an der Kugelfläche die normalen Ableitungen:*)

$$f_n(a, b, c)$$

besitzt, kann sich von der Funktion:

$$70)\quad U_i(x, y, z) = -\frac{R}{n} f_n\left(\cos(r_1x),\ \cos(r_1y),\ \cos(r_1z)\right)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n$$

nur um eine (im übrigen willkürliche) Konstante unterscheiden.

Die Potentialfunktion des Aufsenraumes, welche an der Kugelfläche die normalen Ableitungen:

$$f_n(a, b, c)$$

besitzt, ist:

$$71)\quad U_a(x, y, z) = \frac{R}{n+1} f_n\left(\cos(r_1x),\ \cos(r_1y),\ \cos(r_1z)\right)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},$$

wenn r_1 immer die Entfernung und Richtung:

$$\text{Kugelcentrum} \longrightarrow (xyz)$$

vorstellt.

Eine so einfache Ausdehnung des Satzes Xb) auf die Lösung des allgemeinen hydrodynamischen Problems, wie die des Satzes Xa) auf die Lösung des allgemeinen elektrostatischen Problemes ist nicht möglich, es lässt sich jedoch wieder für die Kugelfläche sowohl, als auch in viel allgemeineren Fällen die Existenz der U_i und U_a mit Hilfe der Methoden von C. Neumann und Robin beweisen, die wir im V. Teile wesentlich verallgemeinert betrachten werden.

Wir werden, wie wir nunmehr zeigen werden, mit Hilfe einer Erweiterung des Begriffes der Potentialfunktion (Teil IV) im stande sein, das elektrostatische und hydrodynamische Problem unter sehr allgemeinen Bedingungen zu lösen. (Teil V.)

---

*) Da wir jetzt stets ν als die inneren Normalen der Kugelfläche auffassen, ist die normale Ableitung von U

$$= \frac{\partial U}{\partial \nu} = -\frac{\partial U}{\partial r_1} \text{ an der Kugelfläche (R).}$$

IV. Teil.

Theorie der allgemeinen Potentialfunktionen.

I. Abschnitt.

Definition der allgemeinen Potentialfunktionen, ihre Darstellung als Oberflächenintegrale und die Lage ihrer extremen Werte.

1. Kapitel.

Definition der allgemeinen Potentialfunktionen.

§ 1.

Wir werden es in diesem Teile wiederum mit Funktionen U des Innen- und Aufsenraumes einer geschlossenen Fläche ω zu thun haben; die Fläche ω soll nun aber wieder den allgemeineren Charakter haben, wie er durch die Festsetzungen in den einleitenden Bemerkungen*) festgelegt wurde. Die als abteilungsweise eindeutig und stetig anzunehmenden Randwerte ([43]) solcher Funktionen des Innen- und Aufsenraumes von ω bezeichnen wir in diesem Teile stets mit f und die Kurven, durch welche ω in Flächenteile zerlegt wird, auf denen

$$f, \cos(\nu x), \cos(\nu y), \cos(\nu z)$$

eindeutig und stetig sind, als die Trennungskurven**) der Fläche ω in bezug auf die Randwerte f oder kurz als die Trennungskurven von ω. Nach diesen Festsetzungen sprechen wir die folgenden Definitionen aus:

---

*) Bei Berücksichtigung des Kleingedruckten.

**) Wir werden später zu diesen Trennungskurven auch die Kurven hinzurechnen, in denen die ersten Ableitungen von f unstetig sind.

§ 2.

Definition 1. Eine Funktion U der Stelle (xyz) des Innenraumes τ einer geschlossenen Fläche ω soll eine allgemeine Potentialfunktion dieses Innenraumes τ genannt werden, wenn

1. U in dem ganzen Gebiete τ im allgemeinen eindeutig und stetig ist und zwar eindeutig und stetig in dem ganzen Gebiete τ, solange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält; wenn

2. sämmtliche Ableitungen von U innerhalb τ eindeutig und stetig sind, und wenn

3. im ganzen Raume τ die Differentialgleichung:

$$1)\quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=0$$

erfüllt ist.

§ 3.

Definition 2. Eine Funktion U der Stelle (xyz) des Aufsenraumes τ einer geschlossenen Fläche ω soll eine allgemeine Potentialfunktion dieses Aufsenraumes τ genannt werden, wenn U die den obengenannten drei Bedingungen entsprechenden Bedingungen erfüllt und in Punkten, welche eine genügend grofse Entfernung P von einem im Endlichen gelegenen Punkte besitzen, den Gleichungen genügt:

$$2)\quad U = D,$$

$$3)\quad \begin{cases} P\dfrac{\partial U}{\partial x}=D_1, \\ P\dfrac{\partial U}{\partial y}=D_2, \\ P\dfrac{\partial U}{\partial z}=D_3, \end{cases}$$

wo D, D_1, D_2, D_3 Gröfsen vorstellen, die durch Vergröfserung von P unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

§ 4.

Wir werden in diesem Teile die folgende Aufgabe lösen: Wir werden zeigen, dass wir stets eine allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes sowohl, als auch des Aufsenraumes von ω angeben können, welche im ganzen Innen- resp. Aufsenraume eindeutig und stetig sind und an der Fläche ω die vorgeschriebenen Werte f annehmen, wenn f den folgenden Bedingungen genügt:

Es sei ω_i' eine geschlossene Fläche, die ganz innerhalb ω liegt (ω_a' eine geschlossene Fläche von solcher Beschaffenheit, dass ω ganz innerhalb ω_a' liegt), und wir kennen eine Funktion F der Stelle, welche in dem von ω und ω_i' (ω und ω_a') begrenzten Raume mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat, und welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt. Die Flächen ω_i' (ω_a') können dabei der Fläche ω beliebig nahe liegen.

Wir werden ferner einige wichtige Modifikationen und Verallgemeinerungen dieser Bedingungen kennen lernen.

2. Kapitel.

Die Darstellung der allgemeinen Potentialfunktionen als Oberflächenintegrale.

§ 1.

Die Sätze I bis V des III. Teiles, welche für Potentialfunktionen und stetig gekrümmte Flächen ω abgeleitet wurden, sind ohne Weiteres auch auf den Fall auszudehnen, dass die Funktionen

$$\cos(\nu x),\ \cos(\nu y),\ \cos(\nu z)$$

auf ω nur abteilungsweise stetig sind, dagegen ist ihre Ausdehnung auf den Fall, dass die Funktionen U allgemeine Potentialfunktionen sind, nicht mehr allgemein zulässig. Denken wir uns indessen eine geschlossene Fläche ω_i', die ganz innerhalb ω liegt, so ist eine allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω eine Potentialfunktion des Innenraumes von ω_i', und denken wir uns eine geschlossene Fläche ω_a' so, dass ω ganz innerhalb ω_a' liegt, so ist eine allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω eine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_a', und wir können nach diesen Bemerkungen die uns hier zunächst

interessierenden Sätze II und III des III. Teiles in folgender Weise auf allgemeine Potentialfunktionen ausdehnen:

Ia) Jede allgemeine Potentialfunktion U des Innenraumes τ einer geschlossenen Fläche ω lässt sich an jeder Stelle (xyz) innerhalb τ durch die Formel darstellen:

$$4a)\quad U = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_i'}\frac{\partial U}{\partial\nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_i'} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Dabei bedeutet ω_i' irgend eine innerhalb τ verlaufende, den Punkt (xyz) in ihrem Innenraum enthaltende geschlossene Fläche, $d\omega$ ein Element derselben mit der inneren Normale ν und r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz).$$

Ib) Jede allgemeine Potentialfunktion U des Aufsenraumes τ einer geschlossenen Fläche ω lässt sich an jeder Stelle (xyz) innerhalb τ durch die Formel darstellen:

$$4b)\quad U = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_a'}\frac{\partial U}{\partial\nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_a'} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega.$$

Dabei bedeutet ω_a' irgend eine ω umschliefsende, ganz innerhalb τ verlaufende und den Punkt (xyz) in ihrem Aufsenraum enthaltende geschlossene Fläche, $d\omega$ ein Element derselben mit der äufseren Normale ν und r die Entfernung und Richtung:

$$d\omega \longrightarrow (xyz).$$

Ic) Ist U eine allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes einer geschlossenen Fläche ω, so ist für jeden Punkt (xyz) des Aufsenraumes:

$$4c)\quad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_i'}\frac{\partial U}{\partial\nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_i'} U\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

bei denselben Bezeichnungen, wie in Satz Ia).

Id) Ist U eine allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes einer geschlossenen Fläche ω, so ist für jeden Punkt (xyz) des Innenraumes:

$$\text{4d)}\quad 0 = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_a'} \frac{\partial U}{\partial \nu}\,\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega_a'} U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

bei denselben Bezeichnungen, wie im Satze Ib).

§ 2.

Wir werden im folgenden stets, wenn wir von den Flächen ω_i' ω_a' sprechen, dieselben von einer ganz bestimmten Form annehmen, jede derselben bestehend aus Teilen einer ringförmigen Fläche von solcher Beschaffenheit, dass jede Normalebene der Trennungskurven aus derselben einen Kreis von dem (beliebig kleinen) Radius ϱ ausschneidet, und Flächen, welche von den stetig gekrümmten Flächenteilen von ω den (beliebig kleinen) kürzesten Abstand r haben.

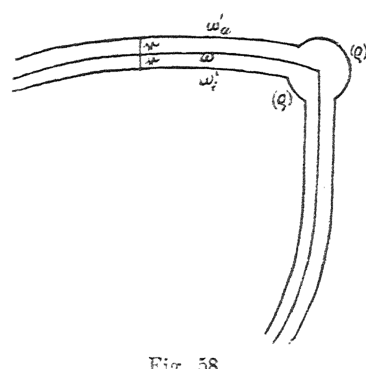


Fig. 58.

Mit Rücksicht auf diese Festsetzung werden wir von je zwei Teilen der Flächen ω_i' und ω_a' sprechen, einem ringförmigen Teile (ϱ) und einem zweiten Teile (r), den wir als die Parallelfläche zu ω bezeichnen wollen.

Für den Fall, dass die Trennungskurven nicht stetig gekrümmt sind, sondern Trennungspunkte besitzen, oder falls mehrere Teile der Trennungskurven in einem Punkte zusammenlaufen, wird die ringförmige Fläche (ϱ) auf der einen Seite von ω durch eine kleine Kugelkalotte mit dem Radius ϱ um den betreffenden Punkt als Centrum zu ergänzen sein; wir werden uns bei den folgenden Untersuchungen im Wortlaut nur an stetig gekrümmte Trennungskurven halten; die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall dürfte wohl eine besondere, ausführliche Behandlung nicht benötigen.

Zusatz zu Ia) bis Id). Wir nehmen an, wir wüssten von den allgemeinen Potentialfunktionen U_i und U_a des Innen- resp. Aufsenraumes, dass an der Fläche ω in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven ihre

normalen Ableitungen(43) endlich sind und dass bei genügender Annäherung an die Trennungskurven:

$$5a)\quad \varrho\,\frac{\partial U_i}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho),\quad \varrho\,\frac{\partial U_a}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho),$$

und bei genügender Annäherung des variabeln Punktes auf einer Fläche ω', welche mit ω eine Trennungskurve gemein hat und ω überall unter von null verschiedenen Winkeln θ schneidet, an einen Punkt dieser Kurve:

$$5b)\quad \varrho'\,\frac{\partial U_i}{\partial h'} = \varDelta(\varrho'),\quad \varrho'\,\frac{\partial U_a}{\partial h'} = \varDelta(\varrho'),^{*)}$$

wo ϱ resp. ϱ' die kürzesten Entfernungen von den Trennungskurven vorstellen, h' irgend eine tangentiale Richtung von ω' und $\varDelta(\varrho)$, $\varDelta(\varrho')$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ resp. ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können; in diesem Falle gelten die Formeln:

$$6a)\quad \left\{\begin{aligned} U_i &= -\frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\omega U_i\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ 0 &= -\frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial U_a}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int_\omega U_a\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{aligned}\right\}\ \text{im ganzen Innenraume,}$$

$$6b)\quad \left\{\begin{aligned} U_a &= \frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial U_a}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int_\omega U_a\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ 0 &= \frac{1}{4\pi}\int_\omega \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int_\omega U_i\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{aligned}\right\}\ \text{im ganzen Aufsenraume,}$$

wenn ν die innere Normale von $d\omega$ vorstellt.

In diesem Falle können wir nämlich bei den Formeln 4a) bis 4d) zur Grenze übergehen; mit abnehmendem r und ϱ konvergieren die Integrale über die Ringflächen (ϱ) zu null(44), die Integrale über die Parallelflächen (r), die in die Integrale über ω übergehen, zu endlichen Grenzwerten.

---

*) Und zwar bei genügend kleinem θ:

$$5c)\quad \varrho'\,\frac{\partial U_i}{\partial h'} = \frac{D(\varrho')}{\sin^\lambda\theta},\quad \varrho'\,\frac{\partial U_a}{\partial h'} = \frac{D(\varrho')}{\sin^\lambda\theta},\ (\lambda < 1).$$

3. Kapitel.

Die Lage der Maxima und Minima einer allgemeinen Potentialfunktion.

§ 1.

Da jede allgemeine Potentialfunktion des Innen- oder Aufsenraumes von ω eine Potentialfunktion irgend eines Gebietes ist, das ganz innerhalb des Innen- oder Aufsenraumes von ω liegt, folgt aus Satz VII des III. Teiles:

II. Die Maximal- und Minimalwerte einer allgemeinen Potentialfunktion U des Innen- oder Aufsenraumes von ω können nicht in endlicher Entfernung von ω liegen, falls U nicht überhaupt in endlicher Entfernung von ω konstant ist.

§ 2.

Aus diesem Satze ergeben sich, falls wir wissen, dass U im ganzen Innen- resp. Aufsenraum eindeutig und stetig*) ist, die beiden Folgerungen:

Zusatz 1 zu II. Ist K der kleinste, G der gröfste Randwert einer allgemeinen Potentialfunktion U des Innen- oder Aufsenraumes von ω, die im ganzen Innen- oder Aufsenraume eindeutig und stetig ist, so ist im ganzen Innen- oder Aufsenraume:

$$7a)\quad K < U < G,$$

und zwar gilt in endlicher Entfernung von ω die Ungleichung in strengem Sinne, falls $K < G$ (in strengem Sinne).

Zusatz 2 zu II. Sind U_1 und U_2 zwei allgemeine Potentialfunktionen des Innenraumes (Aufsenraumes) von ω, die im ganzen Innenraume (Aufsenraume) eindeutig und stetig sind, und ist an der Fläche ω:

$$7b)\quad U_1 = U_2,$$

so besteht diese Gleichung im ganzen Innenraume (Aufsenraume).

---

*) Wir werden solche Funktionen U als stetige, allgemeine Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes bezeichnen.

II. Abschnitt.

Die Flächenpotentiale V und die Flächenintegrale W einer geschlossenen Fläche ω als allgemeine Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes.

---

1. Kapitel.

Die Flächenpotentiale V einer geschlossenen Fläche ω als allgemeine Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes.

§ 1.

Wir können den folgenden Satz aussprechen:

IIIa) Jedes Flächenpotential der geschlossenen Fläche ω:

$$8)\quad \mathrm{V} = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{\mathrm{r}}$$

ist jedenfalls eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innen- und Aufsenraumes, wenn wir über H die Voraussetzung machen, dass es auf ω eindeutig und stetig*) ist.

Es folgt dies ohne weiteres aus den Sätzen Ia) bis Ic) und Va) des I. Teiles.

§ 2.

Es sei weiter F eine Funktion der Stelle (xyz) des Innen- oder Aufsenraumes von ω, welche alle Eigenschaften einer allgemeinen Potentialfunktion hat, mit der Ausnahme, dass sie der Laplaceschen Gleichung nicht zu genügen braucht; es soll ferner:

$$9)\quad \mathrm{F} = \mathrm{V} \text{ an der Fläche } \omega$$

sein. Wir untersuchen das Integral:

---

*) Obwohl wir die Bedingungen für H viel allgemeiner fassen können, sprechen wir den Satz in dieser Form aus, in der er zunächst für unsere Zwecke genügt.

$$10)\quad T'_F = \int\limits_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

wo τ' den Innenraum der Fläche ω_i' resp. den Aufsenraum der Fläche ω_a' vorstellt.

Wir setzen:

$$11)\quad F = V + V',$$

dann hat die Funktion V' alle Eigenschaften einer allgemeinen Potentialfunktion, mit der Ausnahme, dass sie der Laplaceschen Gleichung nicht zu genügen braucht, und es ist:

$$12)\quad V' = 0 \text{ an der Fläche } \omega.$$

Durch die Substitution 11) geht T'_F über in:

$$13)\quad T'_F = T'_V + T'_{V'} + 2 \int\limits_{\tau'} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V'}{\partial z} \right] d\tau.$$

Nun ist, nach einer Umformung mit Hilfe des Greenschen Theorems:

$$14)\quad \begin{aligned} \int\limits_{\tau'} \left[\frac{\partial V}{\partial x} \frac{\partial V'}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \frac{\partial V'}{\partial y} + \frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial V'}{\partial z} \right] d\tau &= - \int\limits_{\omega'} V' \frac{\partial V}{\partial \nu} d\omega\text{*)} \\ &\quad - \int\limits_{\tau'} V' \Delta V \, d\tau, \\ &= - \int\limits_{\omega'} V' \frac{\partial V}{\partial \nu} d\omega, \end{aligned}$$

da $\Delta V = 0$ ist, somit:

$$15)\quad T'_F = T'_V + T'_{V'} - 2 \int\limits_{\omega'} V' \frac{\partial V}{\partial \nu} d\omega.$$

Das Flächenintegral rechts teilt sich in zwei Teile, über die Parallelfläche (r) zu ω und die ringförmige Fläche (ϱ); nehmen wir

---

*) ν ist hier die in das Gebiet τ' hineingehende Normale von $d\omega$.

im besonderen die Fläche ω als stetig gekrümmt an, so ist ω' mit der Parallelfläche (r) identisch, und es kann das Flächenintegral durch Verkleinerung von r unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden, da V mit abnehmendem r zu null konvergiert.*) Andererseits hat $T'_{V'}$, falls nicht im ganzen Raume τ'

$$V' = 0$$

ist, einen von null verschiedenen, positiven Wert, der durch Ausdehnung des Gebietes τ' nur vergröfsert werden kann; es folgt daraus, dass wir durch genügende Annäherung von ω' an ω stets die Ungleichung:

$$16)\quad T'_F \gtreqless T'_V$$

erreichen können.

IVa) Ist

$$V = \int\limits_{\omega} \frac{H d\omega}{r}$$

ein Flächenpotential der geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, in welchem die Funktion H auf ω eindeutig und stetig ist, ist ferner F irgend eine Funktion der Stelle (xyz) des Innen- oder Aufsenraumes τ von ω, welche alle Eigenschaften einer allgemeinen Potentialfunktion hat, mit der Ausnahme, dass sie der Laplaceschen Gleichung nicht zu genügen braucht, und die an der Fläche ω die Randwerte:

$$17)\quad F = V$$

hat, so können wir stets die Ungleichung:

$$18)\quad \int\limits_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \lesseqgtr \int\limits_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

dadurch erreichen, dass wir die Oberfläche ω' genügend nahe an die Oberfläche ω heranrücken lassen.

---

*) Während $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ endlich bleibt. Vgl. Beweis des Hilfssatzes S. 193.

2. Kapitel.

Die Flächenintegrale W einer geschlossenen Fläche ω als allgemeine Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes.

§ 1.

Wir können den folgenden Satz aussprechen:

IIIb) Jedes Flächenintegral über die geschlossene Fläche ω:

$$19)\quad W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

ist eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innen- und Aufsenraumes, wenn wir über $\varkappa$ lediglich die Voraussetzung machen, dass es auf ω eindeutig und stetig ist.

Es folgt dies ohne weiteres aus den Sätzen Ia) bis Ic) und Vb) des I. Teiles.

§ 2.

Wir machen nunmehr über $\varkappa$ noch die Voraussetzung, dass seine ersten Ableitungen auf ω eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen überall endlich sind, solange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$20)\quad \varrho \frac{\partial \varkappa}{\partial h} = D(\varrho), \quad \varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \varDelta(\varrho)\,(^{45}),$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $D(\varrho)$, $\varDelta(\varrho)$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Das Flächenintegral W besitzt bei unseren Annahmen alle Eigenschaften, die die Voraussetzung des Satzes VIIIa) im I. Teile und des Zusatzes 4 zu demselben in Anm. (23) bilden.

Es ergiebt sich mit Hilfe derselben (46) für eine beliebige Fläche ω in analoger Weise, wie wir den Satz IVa) abgeleitet haben, die Ableitung des folgenden Satzes:

IVb) Ist in dem Flächenintegrale über die geschlossene Fläche ω:

$$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

die Funktion $\varkappa$ auf ω eindeutig und stetig, sind ihre ersten Ableitungen eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen endlich(47), solange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven der Fläche in bezug auf die Funktion $\varkappa$ hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$\varrho \frac{\partial \varkappa}{\partial h} = D(\varrho), \quad \varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \Delta(\varrho) \, (45),$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung und $D(\varrho)$, $\Delta(\varrho)$ Gröfsen vorstellen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können; ist ferner F irgend eine Funktion der Stelle (xyz) des Innen- oder Aufsenraumes τ von ω, welche alle Eigenschaften einer allgemeinen Potentialfunktion hat, mit der Ausnahme, dass sie der Laplaceschen Gleichung nicht zu genügen braucht, und die an der Fläche ω die Randwerte:

$$F = W$$

hat, so können wir stets die Ungleichung:

$$21) \quad \int\limits_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau \leqq \int\limits_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau$$

dadurch erreichen, dass wir die Oberfläche ω' genügend nahe an die Oberfläche ω heranrücken lassen.

§ 3.

Bei den Voraussetzungen des Satzes IVb) hat das Integral T'_W einen bestimmten endlichen Grenzwert:

$$22) \quad T_W = \int\limits_{\tau} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau = -\int\limits_{\omega} W \frac{\partial W}{\partial \nu} d\omega;$$

in gleicher Weise hat bei den Voraussetzungen des Satzes IVa) stets T'_V einen bestimmten, endlichen Grenzwert:

$$23)\quad T_V = \int\limits_\tau \left[\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = -\int\limits_\omega V \frac{\partial V}{\partial \nu} d\omega.$$

Wir können infolgedessen die beiden Sätze IVa) und IVb) folgendermaſsen zusammenfassen:

IVc) Ist F irgend eine Funktion der Stelle (xyz) des Innen- oder Auſsenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω, welche alle Eigenschaften einer allgemeinen Potentialfunktion hat, mit der Ausnahme, dass sie der Laplaceschen Gleichung nicht zu genügen braucht, und welche an der Fläche ω dieselben Randwerte, wie die Funktion:

$$24)\quad U = c_1 \int\limits_\omega \frac{H d\omega}{r} + c_2 \int\limits_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

besitzt, in der c_1 und c_2 gegebene endliche Konstanten, H und $\varkappa$ eindeutige und stetige Funktionen der Stelle auf ω vorstellen; und wissen wir, dass die ersten Ableitungen von $\varkappa$ eindeutig und stetig, die zweiten endlich(47) sind, solange wir uns in endlichen Entfernungen von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven der Fläche ω halten, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$25)\quad \varrho \frac{\partial \varkappa}{\partial h} = D(\varrho),\quad \varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_\omega \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \Delta(\varrho)\,(45),$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $D(\varrho)$, $\Delta(\varrho)$ Gröſsen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können, so ist das einen bestimmten endlichen Wert besitzende Integral:

$$26)\quad \int\limits_\tau \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \leqq \int\limits_\tau \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

wenn anders dem Integral:

$$\int_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau$$

überhaupt ein bestimmter endlicher Grenzwert:

$$\int_{\tau} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau$$

zukommt.

Ist $c_1 = 0$, so gilt der Satz für beliebige geschlossene Flächen ω.

III. Abschnitt.

Untersuchungen für den Innen- und Aufsenraum einer Kugelfläche.

1. Kapitel.

Die Lösung des Hauptproblems für den Innen- und Aufsenraum einer Kugelfläche.

§ 1.

Wir denken uns eine Kugelfläche mit dem Radius R und auf derselben eine Funktion f ausgebreitet, die überall auf der Kugelfläche (R) eindeutig und stetig ist; es mögen aber auf der Kugelfläche eine endliche Anzahl von Trennungskurven vorhanden sein, von solcher Beschaffenheit, dass in endlichen Entfernungen von denselben die ersten Ableitungen von f eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen endlich (47) sind, während bei genügender Annäherung an die Trennungskurven die Relationen:

$$27)\quad \varrho \frac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho), \quad \varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \varDelta(\varrho) \text{(45)}$$

erfüllt sind, wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $D(\varrho)$, $\varDelta(\varrho)$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Die Funktion f ist jedenfalls (nach Vc des II. Teiles) nach allgemeinen Kugelfunktionen f_n entwickelbar:

$$28)\quad f = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} f_n(a, b, c),$$

und es sind daher:

$$29)\quad \begin{cases} U_i = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} f_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{r_1}{R}\right)^n, \\ U_a = \sum_{0}^{\infty} {}_{n} f_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1} \end{cases}$$

jedenfalls allgemeine Potentialfunktion, welche an der Fläche ω die vorgeschriebenen Werte f annehmen, wenn wir wie im II. Teile unter $a_1\, b_1\, c_1$ die Richtungskosinusse der Richtung

Centrum —> (xyz),

mit r_1 die Centraldistanz von (xyz) bezeichnen, und mit a, b, c die Werte von a_1, b_1, c_1, sobald der Punkt (xyz) auf der inneren oder äufseren Seite der Kugelfläche selbst liegt.

§ 2.

Wir können (genau wie im III. Teile S. 212) U_i und U_a in der Form darstellen:

$$30)\quad \begin{cases} U_i = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{(R)} \frac{f\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega - \frac{1}{4\pi R}\int_{(R)} \frac{f d\omega}{r}, \\ U_a = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{(R)} \frac{f\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \frac{1}{4\pi R}\int_{(R)} \frac{f d\omega}{r}, \end{cases}$$

da bei unseren Voraussetzungen über f diese Funktionen auf jeder Kugelfläche (r_1) nach allgemeinen Kugelfunktionen entwickelbar sind,*) und die so entstehenden Reihen stimmen eben mit den Reihen 29) überein.

Die Funktionen 30) erfüllen nun die Voraussetzung des Satzes IV c) und wir können folgendes Resultat aussprechen:

V. Ist f eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf der Kugelfläche, deren erste Ableitungen eindeutig und stetig, und deren zweite Ableitungen

*) Nach V c) des II. Teiles unter Benützung von VIII a) des I. Teiles und Anm. (24) (Zusatz 3 zu VIII b).

endlich(47) sind, solange man sich in endlichen Entfernungen von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho),\ \varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} = \Delta(\varrho)\ (^{45})$$

erfüllt sind, wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung und $D(\varrho)$, $\Delta(\varrho)$ Gröfsen vorstellen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrükt werden können, so sind die Funktionen der Stelle (xyz), $(r_1\, a_1\, b_1\, c_1)$:

$$U_i = \sum_0^\infty {}_n f_n(a_1, b_1, c_1)\left(\frac{r_1}{R}\right)^n,$$

$$U_a = \sum_0^\infty {}_n f_n(a_1, b_1, c_1)\left(\frac{R}{r_1}\right)^{n+1},$$

in denen:

$$f_n(a_1, b_1, c_1) = \frac{2n+1}{4\pi R^2} \int\limits_{(R)} f \cdot P_n(aa_1 + bb_1 + cc_1)\, d\omega,$$

stetige, allgemeine Potentialfunktionen resp. des Innen- und Aufsenraumes der Kugelfläche, welche an der Kugelfläche die Werte f annehmen.

Ist F irgend eine andere Funktion der Stelle (xyz) des Innen- oder Aufsenraumes, die alle Eigenschaften einer allgemeinen Potentialfunktion hat, mit der Ausnahme, dass sie der Laplaceschen Gleichung nicht zu genügen braucht, und welche an der Kugelfläche die Randwerte f annimmt, so erfüllen die beiden Integrale:*)

$$31)\quad \begin{cases} T_i = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ T_a = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \end{cases}$$

*) τ_i sei der Innenraum, τ_a der Aufsenraum der Kugelfläche.

die beide ganz bestimmte endliche Werte haben, die Ungleichungen:

$$
32)\quad \begin{cases} T_i \leqq \displaystyle\int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ T_a \leqq \displaystyle\int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \end{cases}
$$

wenn anders die Integrale:

$$
\int\limits_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,
$$

$$
\int\limits_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,
$$

bei Annäherung der Flächen ω_i' ω_a' an die Kugelfläche (R) überhaupt bestimmte endliche Grenzwerte haben.

Bemerkung. Die zweite Voraussetzung 27) kann fortbleiben[45], wenn wir für irgend eine Funktion F die Endlichkeit der in 32) rechts stehenden Integrale beweisen können.

2. Kapitel.

Die (erweiterten) Poincaréschen Sätze für die Kugelfläche.

§ 1.

Es seien U_i und U_a die durch den Satz V) gegebenen allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes der Kugelfläche (R), welche an der Kugelfläche die den Voraussetzungen des Satzes V) entsprechenden Werte f annehmen, dann ist an einer Kugelfläche mit dem Radius $R_i < R$, resp. an einer Kugelfläche mit dem Radius $R_a > R$:

$$
33)\quad \begin{cases} U_i\big|_{(R_i)} = \displaystyle\sum_0^\infty{}^n f_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{R_i}{R}\right)^n, \\ U_a\big|_{(R_a)} = \displaystyle\sum_0^\infty{}^n f_n(a_1, b_1, c_1) \left(\frac{R}{R_a}\right)^{n+1} \end{cases}
$$

und:

$$34)\quad \left\{ \begin{aligned} \left|\frac{\partial U_i}{\partial r_1}\right|_{(R_i)} &= \sum_1^{\infty} {}^n f_n(a_1, b_1, c_1) \frac{n}{R} \left(\frac{R_i}{R}\right)^{n-1}, \\ \left|\frac{\partial U_a}{\partial r_1}\right|_{(R_a)} &= -\sum_0^{\infty} {}^n f_n(a_1, b_1, c_1) \frac{n+1}{R} \left(\frac{R}{R_a}\right)^{n+2}. \end{aligned} \right.$$

Sei τ_i' der Innenraum von (R_i), τ_a' der Aufsenraum von (R_a), so ist:

$$35)\quad \left\{ \begin{aligned} \int_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau &= + \int_{(R_i)} U_i \frac{\partial U_i}{\partial r_1} d\omega, \\ &= \sum_1^{\infty} {}^n \frac{4\pi n}{2n+1} \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2n-1} \int_{(R_i)} f_n^2 \, d\omega, \\ \int_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau &= - \int_{(R_a)} U_a \frac{\partial U_a}{\partial r_1} d\omega, \\ &= \sum_0^{\infty} {}^n \frac{4\pi(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{R}{R_a}\right)^{2n+3} \int_{(R_a)} f_n^2 \, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Setzen wir noch:

$$36)\quad R_i R_a = R^2,$$

so können wir die Formeln 35) auch so schreiben:

$$37)\quad \left\{ \begin{aligned} &\int_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \\ &\qquad = \sum_1^{\infty} {}^n \frac{4\pi n}{2n+1} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2n+1} \int_{(R)} f_n^2 \, d\omega, \\ &\int_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \\ &\qquad = \sum_0^{\infty} {}^n \frac{4\pi(n+1)}{2n+1} \cdot \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2n+1} \int_{(R)} f_n^2 \, d\omega, \end{aligned} \right.$$

und wir können aus denselben, da jedes

$$n < n+1,$$

den Schluss ziehen:

$$38)\int\limits_{\tau_i'}\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right]d\tau \gtreqless \int\limits_{\tau_a'}\left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right]d\tau.$$

Beide Integrale haben bei unseren Voraussetzungen ganz bestimmte endliche Grenzwerte, es besteht also auch im Grenzfalle die Ungleichung:

$$39)\quad T_i \gtreqless T_a,$$

wo:

$$40)\quad \begin{cases} T_i = \int\limits_{\tau_i}\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right]d\tau, \\ T_a = \int\limits_{\tau_a}\left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right]d\tau. \end{cases}$$

VIa) Sind U_i resp. U_a die durch den Satz V gegebenen allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes der Kugelfläche (R), welche an der Kugelfläche die den Voraussetzungen des Satzes V entsprechenden Werte f annehmen, und bezeichnen T_i und T_a die über den Innen- resp. Aufsenraum von (R) zu erstreckenden Integrale:

$$T_i = \int\limits_{\tau_i}\left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right]d\tau,$$

$$T_a = \int\limits_{\tau_a}\left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right]d\tau,$$

so ist stets:

$$T_i \gtreqless T_a.$$

§ 2.

Die Funktion U_i erfüllt stets die Bedingung

$$41a)\quad \int\limits_{(R)} \frac{\partial U_i}{\partial \nu}\, d\omega = 0;$$

wir setzen voraus, dass auch U_a der Bedingung:

$$41b)\quad \int\limits_{(R)} \frac{\partial U_a}{\partial \nu}\, d\omega = 0$$

genüge, dann ist auch an jeder Kugelfläche (R_a):

$$\int_{(R_a)} \frac{\partial U_a}{\partial r_1} d\omega = 0,$$

somit:

$$42)\ f_0 = 0,$$

und es folgt aus den Formeln 37), da jedes:

$$n + 1 \lesseqqgtr 2n,\ n = 1, 2 \ldots:$$

$$43)\ \int_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial U_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$$

$$\lesseqqgtr 2 \int_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Beide Integrale haben bei unseren Voraussetzungen bestimmte endliche Grenzwerte T_i und T_a, es folgt somit:

$$44)\ T_a \lesseqqgtr 2\, T_i$$

VIb) Erfüllt bei den Voraussetzungen des Satzes VIa) U_a die Bedingung:

$$\int_{(R)} \frac{\partial U_a}{\partial \nu} d\omega = 0,$$

so besteht stets die Ungleichung:

$$45)\ T_i \gtreqqless \frac{1}{2} T_a.$$

§ 3.

Wir können die erste Formel 33) auch so schreiben:

$$46)\ |U_i|_{(R_i)} = C + \sum_{1}^{\infty}{}^n f_n (a_1, b_1, c_1) \left(\frac{R_i}{R}\right)^n,$$

wo C eine Konstante ist, welche der Gleichung:

$$47)\ \int_{(R)} (f - C)\, d\omega = 0$$

genügt, und wo wir wieder den allgemeineren Fall betrachten, in dem im allgemeinen

$$\int\limits_{(R)} \frac{\partial U_a}{\partial \nu} d\omega \neq 0$$

ist.

Aus 46) folgt:

$$\int\limits_{(R_i)} (U_i - C)^2 d\omega = \sum_1^{\infty} {}^n \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2n} \int\limits_{(R_i)} f_n^2 d\omega,$$

oder

$$48) \int\limits_{(R_i)} (U_i - C)^2 d\omega = \sum_1^{\infty} {}^n \frac{4\pi}{2n+1} \left(\frac{R_i}{R}\right)^{2n+2} \int\limits_{(R)} f_n^2 d\omega.$$

Vergleichen wir diese Formel mit der ersten Formel 37), so folgt:

$$49) \int\limits_{(R_i)} (U_i - C)^2 d\omega \lesseqgtr R_i \int\limits_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial U_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau.$$

Beide Integrale haben ganz bestimmte endliche Grenzwerte, es besteht also auch im Grenzfalle die Ungleichung:

$$50) \quad S \lesseqgtr R T_i,$$

wenn man:

$$51) \quad S = \int\limits_{(R)} (f - C)^2 d\omega$$

setzt.

VIc) Bei den Voraussetzungen des Satzes VIa) ist stets:

$$S \lesseqgtr R T_i,$$

wenn man unter S das Integral:

$$S = \int\limits_{(R)} (f - C)^2 d\omega$$

versteht und die Konstante C durch die Gleichung:

$$\int\limits_{(R)} (f - C) d\omega = 0$$

definiert.

IV. Abschnitt.

Untersuchungen für geschlossene Flächen, welche gegen einen inneren Punkt konvex sind.

Wir wollen unter einer geschlossenen Fläche ω, die gegen einen inneren Punkt O konvex ist, eine geschlossene Fläche ω verstehen, welche keine durch den Punkt O gehende Tangentialebene besitzt. Für den Innen- und Aufsenraum einer solchen Fläche wollen wir unser Hauptproblem in diesem Abschnitt lösen.

1. Kapitel.

Die (erweiterten) Poincaréschen Sätze für geschlossene Flächen, die gegen einen inneren Punkt konvex sind.

§ 1.

Es seien $\varkappa_i$ und $\varkappa_a$ eindeutige und stetige Funktionen der Stelle auf einer geschlossenen Fläche ω, die gegen einen inneren Punkt O konvex ist, ihre ersten Ableitungen seien eindeutig und stetig, ihre zweiten Ableitungen endlich(47), solange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$52)\quad \begin{cases} \varrho\,\dfrac{\partial \varkappa_i}{\partial h} = D_i(\varrho),\ \varrho\,\dfrac{\partial}{\partial \nu}\displaystyle\int\limits_{\omega} \varkappa_i\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = \varDelta_i(\varrho)\,(^{45}), \\[2ex] \varrho\,\dfrac{\partial \varkappa_a}{\partial h} = D_a(\varrho),\ \varrho\,\dfrac{\partial}{\partial \nu}\displaystyle\int\limits_{\omega} \varkappa_a\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = \varDelta_a(\varrho)\,(^{45}), \end{cases}$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $D_i(\varrho)$, $D_a(\varrho)$, $\varDelta_i(\varrho)$, $\varDelta_a(\varrho)$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können, überdies wisse man von den Funktionen:

$$
53) \begin{cases} W_i = \int\limits_\omega \varkappa_i \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \text{ des Innenraumes,} \\ W_a = \int\limits_\omega \varkappa_a \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \text{ des Aufsenraumes} \end{cases}
$$

dass an der Fläche ω:

$$
54) \quad W_i = W_a,
$$

wir untersuchen die über den Innen- resp. Aufsenraum von ω zu erstreckenden Integrale:

$$
55) \begin{cases} T_i = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ T_a = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial W_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \end{cases}
$$

die bei unseren Voraussetzungen ganz bestimmte endliche Werte haben, und denen die in dem Satze IVb) gegebene Minimaleigenschaft zukommt.

§ 2.

Wir können nun, da die Fläche ω gegen den inneren Punkt O konvex ist, eine ganz innerhalb τ_i gelegene Kugelfläche (R) um O als Centrum konstruieren; dann wird jeder von O nach einem Punkte (θ, φ) der Kugelfläche gezogene Radiusvektor die Fläche in einem und nur einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ schneiden.

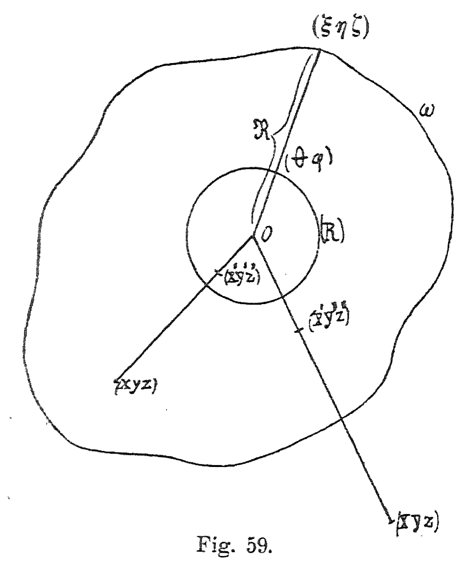


Fig. 59.

Bezeichnen wir die Polarkoordinaten von $(\xi\eta\zeta)$ mit

$$
\mathfrak{R}, \theta, \varphi,
$$

so wird in der die Fläche ω darstellenden Gleichung:

$$
56) \quad \mathfrak{R} = \mathfrak{R}(\theta, \varphi)
$$

$\mathfrak{R}$ eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf der Fläche ω sein, deren erste Ableitungen

nach ξ, η, ζ auf den stetig gekrümmten Flächenteilen eindeutig und stetig und deren zweite Ableitungen endlich sind.

Wir geben irgend einem Punkte (xyz) des Raumes die Polarkoordinaten $(r_1 \theta_1 \varphi_1)$, so dass:

$$57)\quad \begin{cases} x = r_1 \cos\theta_1, \\ y = r_1 \sin\theta_1 \cos\varphi_1, \\ z = r_1 \sin\theta_1 \sin\varphi_1 \end{cases}$$

und setzen:

$$58)\quad \begin{cases} x' = \dfrac{R}{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)}\, x = \dfrac{R r_1}{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)} \cos\theta_1, \\ y' = \dfrac{R}{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)}\, y = \dfrac{R r_1}{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)} \sin\theta_1 \cos\varphi_1, \\ z' = \dfrac{R}{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)}\, z = \dfrac{R r_1}{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)} \sin\theta_1 \sin\varphi_1; \end{cases}$$

dann ordnet diese Transformation jedem Punkte der Fläche ω einen Punkt der Kugelfläche (R) zu, jedem Punkte des Aufsenraumes von ω einen Punkt des Aufsenraumes von (R), jedem Punkte des Innenraumes von ω einen Punkt des Innenraumes von (R).

Setzen wir die Auflösungen von 58) nach (x, y, z):

$$59)\quad \begin{cases} x = \dfrac{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)}{R}\, x', \\ y = \dfrac{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)}{R}\, y', \\ z = \dfrac{\mathfrak{R}(\theta_1, \varphi_1)}{R}\, z' \end{cases}$$

in den Funktionen:

$$W_i(x, y, z), \quad W_a(x, y, z)$$

ein, so gehen diese in Funktionen

$$W_i'(x', y', z'), \quad W_a'(x', y', z')$$

des Innen- resp. Aufsenraumes der Kugelfläche (R) über, und wir bilden nun die Integrale:

$$60)\quad \begin{cases} T_i' = \displaystyle\int_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial W_i'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i'}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau', \\ T_a' = \displaystyle\int_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial W_a'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_a'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_a'}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau', \end{cases}$$

wo wir unter τ_i' den Innenraum, unter τ_a' den Aufsenraum der Kugelfläche (R) verstehen.

Nun ist:

$$61) \quad d\tau' = \frac{R^3}{\Re^3(\vartheta_1, \varphi_1)} d\tau,$$

und es folgt aus den Transformationsgleichungen 58), 59):

$$62) \begin{cases} {}^{*)}\left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial W'}{\partial z'}\right)^2 \\ \qquad = a_{11}\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + a_{22}\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + a_{33}\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \\ \qquad + 2a_{23}\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z} + 2a_{31}\frac{\partial W}{\partial z}\frac{\partial W}{\partial x} + 2a_{12}\frac{\partial W}{\partial x}\frac{\partial W}{\partial y}, \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \\ \qquad = b_{11}\left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2 + b_{22}\left(\frac{\partial W'}{\partial y'}\right)^2 + b_{33}\left(\frac{\partial W'}{\partial z'}\right)^2 \\ \qquad + 2b_{23}\frac{\partial W'}{\partial y'}\frac{\partial W'}{\partial z'} + 2b_{31}\frac{\partial W'}{\partial z'}\frac{\partial W'}{\partial x'} + 2b_{12}\frac{\partial W'}{\partial x'}\frac{\partial W'}{\partial y'}, \end{cases}$$

wo die $a_{11} \ldots$, $a_{23} \ldots$, $b_{11} \ldots$, $b_{23} \ldots$ resp. durch die Formeln gegeben sind:

$$63) \begin{cases} a_{11} = \left(\frac{\partial x}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial z'}\right)^2, \ldots \\ a_{23} = \frac{\partial y}{\partial x'}\frac{\partial z}{\partial x'} + \frac{\partial y}{\partial y'}\frac{\partial z}{\partial y'} + \frac{\partial y}{\partial z'}\frac{\partial z}{\partial z'}, \ldots \\ b_{11} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial z}\right)^2, \ldots \\ b_{23} = \frac{\partial y'}{\partial x}\frac{\partial z'}{\partial x} + \frac{\partial y'}{\partial y}\frac{\partial z'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial z}\frac{\partial z'}{\partial z}, \ldots; \end{cases}$$

dabei sind nach 58), 59) bei unseren Voraussetzungen über $\Re$ und seine Ableitungen alle

$$\frac{\partial x}{\partial x'}, \ldots, \quad \frac{\partial x'}{\partial x}, \ldots$$

---

*) Wenn wir zu W resp. W' die Indices i und a nicht hinzufügen, gelten die betreffenden Untersuchungen für W_i und W_a, resp. W_i' und W_a'.

endliche Größen, das gleiche gilt daher von den Funktionen:

$$a_{11}\ldots a_{23}\ldots b_{11}\ldots b_{23}\ldots,$$

und es folgt somit aus 62), da jedes:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2, \ldots, 2\frac{\partial W}{\partial y}\frac{\partial W}{\partial z}, \ldots$$

seinem absoluten Werte nach kleiner ist als:

$$\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2,$$

und da jedes:

$$\left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2, \ldots, 2\frac{\partial W'}{\partial y'}\frac{\partial W'}{\partial z'}, \ldots$$

seinem absoluten Werte nach kleiner ist als:

$$\left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial W'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial W'}{\partial z'}\right)^2:$$

$$64)\quad \begin{cases} \left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial W'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial W'}{\partial z'}\right)^2 \overline{\overline{<}}\, G\left(\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right), \\ \left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2 \overline{\overline{<}}\, G'\left(\left(\frac{\partial W'}{\partial x'}\right)^2+\left(\frac{\partial W'}{\partial y'}\right)^2+\left(\frac{\partial W'}{\partial z'}\right)^2\right), \end{cases}$$

wo:

$$65)\quad \begin{cases} G = \text{abs. Max.}\,(a_{11})+\cdots+\text{abs. Max.}\,(a_{23})+\cdots, \\ G' = \text{abs. Max.}\,(b_{11})+\cdots+\text{abs. Max.}\,(b_{23})+\cdots \end{cases}$$

endliche Zahlen vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängen.

Aus den Formeln 55), 60), 61), 64) folgt nun unmittelbar:

$$66)\quad \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{G}}\, T_i \overline{\overline{<}}\, T_i' \overline{\overline{<}}\, \mathfrak{G}\, T_i, \\ \frac{1}{\mathfrak{G}}\, T_a \overline{\overline{<}}\, T_a' \overline{\overline{<}}\, \mathfrak{G}\, T_a, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{G}$ eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Zahl vorstellt.

§ 3.

Es seien nun $\mathfrak{U}_i'$ resp. $\mathfrak{U}_a'$ die durch den Satz V gegebenen allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes der Kugelfläche (R), welche an derselben die Werte W′ haben, dann ergiebt uns derselbe Satz V([48]):

$$67) \begin{cases} \mathfrak{T}_i' \gtreqless T_i', \\ \mathfrak{T}_a' \gtreqless T_a', \end{cases}$$

wenn man:

$$68) \begin{cases} \mathfrak{T}_i' = \int\limits_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_i'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_i'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_i'}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau', \\ \mathfrak{T}_a' = \int\limits_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_a'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_a'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_a'}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau' \end{cases}$$

setzt.*)

Infolge der Transformationen 58) gehen $\mathfrak{U}_i'$ und $\mathfrak{U}_a'$ in Funktionen

$$\mathfrak{U}_i \text{ und } \mathfrak{U}_a$$

des Innen- resp. Aufsenraumes von ω über, und es gelten nun nach 66) die Ungleichungen:

$$69) \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{G}} \mathfrak{T}_i \gtreqless \mathfrak{T}_i' \gtreqless \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{T}_i, \\ \frac{1}{\mathfrak{G}} \mathfrak{T}_a \gtreqless \mathfrak{T}_a' \gtreqless \mathfrak{G} \cdot \mathfrak{T}_a, \end{cases}$$

wenn wir:

$$70) \begin{cases} \mathfrak{T}_i = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \mathfrak{T}_a = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{U}_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{U}_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau \end{cases}$$

setzen.

Da schliefslich die Funktionen $\mathfrak{U}_i$ und $\mathfrak{U}_a$ im allgemeinen nicht der Laplaceschen Gleichung genügen, sonst aber alle Eigenschaften

*) Da T_i' T_a' nach 66) endlich sind (vgl. Bemerkung zu Satz V, S. 230).

von allgemeinen Potentialfunktionen haben, bestehen nach IV c) die Ungleichungen:

$$71) \begin{cases} T_i \leqq \mathfrak{T}_i, \\ T_a \leqq \mathfrak{T}_a; \end{cases}$$

die Ungleichungen 66), 67), 69), 71) gestatten uns, einen wichtigen Schluss zu ziehen:

§ 4.

Es folgt aus der ersten Ungleichung 71) und der ersten Ungleichung 69):

$$72a) \begin{cases} T_i \leqq \mathfrak{T}_i, \\ \quad \leqq \mathfrak{G}\,\mathfrak{T}_i'; \end{cases}$$

andererseits folgt aus der zweiten Ungleichung 66) und der zweiten Ungleichung 67):

$$72b) \begin{cases} T_a \geqq \frac{1}{\mathfrak{G}} T_a', \\ \quad \geqq \frac{1}{\mathfrak{G}} \mathfrak{T}_a'. \end{cases}$$

Wir dividieren 72a) durch 72b), und es folgt:

$$73) \quad \frac{T_i}{T_a} \leqq \mathfrak{G}^2 \frac{\mathfrak{T}_i'}{\mathfrak{T}_a'};$$

nun ist nach VIa):

$$\frac{\mathfrak{T}_i'}{\mathfrak{T}_a'} \leqq 1,$$

somit:

$$74) \quad T_i \leqq \mathfrak{G}^2 \cdot T_a.$$

VIIa) Bezeichnet man mit T_i und T_a die über den Innen- resp. Aufsenraum einer geschlossenen, gegen einen inneren Punkt O konvexen Fläche zu nehmenden Integrale:

$$T_i = \int_{\tau_i}\left[\left(\frac{\partial W_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

$$T_a = \int_{\tau_a}\left[\left(\frac{\partial W_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

in denen:

$$W_i = \int_\omega \varkappa_i \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

$$W_a = \int_\omega \varkappa_a \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega;$$

und bedeuten dabei $\varkappa_i$ und $\varkappa_a$ eindeutige und stetige Funktionen der Stelle auf ω, deren erste Ableitungen eindeutig und stetig, und deren zweite Ableitungen endlich sind,*) solange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$\varrho \frac{\partial \varkappa_i}{\partial h} = D_i(\varrho), \quad \varrho \frac{\partial \varkappa_a}{\partial h} = D_a(\varrho) \, (^{45}),$$

$$\varrho \frac{\partial W_i}{\partial \nu} = \Delta_i(\varrho), \quad \varrho \frac{\partial W_a}{\partial \nu} = \Delta_a(\varrho) \, (^{45}),$$

wo ϱ den kürzesten Abstand des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $D_i(\varrho)$, $D_a(\varrho)$, $\Delta_i(\varrho)$, $\Delta_a(\varrho)$ Gröfsen, welche durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können; wissen wir schliefslich, dass an der Fläche ω:

$$W_i = W_a,$$

so ist stets:

$$T_i \gtreqless \mathfrak{G}^2 T_a,$$

wo $\mathfrak{G}$ eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Zahl ist.

---

*) Die Bedingung über die zweiten Ableitungen kann fortbleiben, falls die ersten Ableitungen von $\varkappa_i$ und $\varkappa_a$ in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven regulär (45) sind.

§ 5.

Der Satz V gestattet uns, auch allgemeine Potentialfunktionen $\overline{\mathfrak{U}}_i'$ und $\overline{\mathfrak{U}}_a'$ des Innen- und Aufsenraumes der Kugelfläche (R) anzugeben, welche an der Kugelfläche die Werte:

$$75)\quad \overline{\mathfrak{U}}_i' = \overline{\mathfrak{U}}_a' = W' + \Gamma$$

haben, wo Γ eine Konstante ist und die Bedingung:

$$76)\quad \int\limits_{(R)} \frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a'}{\partial \nu} d\omega = 0$$

erfüllt ist.

Durch die Transformation 58) verwandeln sich die Funktionen $\overline{\mathfrak{U}}_i'$ und $\overline{\mathfrak{U}}_a'$ in Funktionen der Stelle des Innen- resp. Aufsenraumes von ω:

$$\overline{\mathfrak{U}}_i \text{ und } \overline{\mathfrak{U}}_a.$$

Wir setzen:

$$77)\quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{T}}_i' = \int\limits_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i'}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau', \\ \overline{\mathfrak{T}}_a' = \int\limits_{\tau_a'} \left[\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a'}{\partial x'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a'}{\partial y'}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a'}{\partial z'}\right)^2\right] d\tau', \end{cases}$$

und:

$$78)\quad \begin{cases} \overline{\mathfrak{T}}_i = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \overline{\mathfrak{T}}_a = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_a}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \end{cases}$$

dann ist wieder analog 66):

$$79)\quad \begin{cases} \frac{1}{\mathfrak{G}} \overline{\mathfrak{T}}_i \leqq \overline{\mathfrak{T}}_i' \leqq \mathfrak{G}\, \overline{\mathfrak{T}}_i, \\ \frac{1}{\mathfrak{G}} \overline{\mathfrak{T}}_a \leqq \overline{\mathfrak{T}}_a' \leqq \mathfrak{G}\, \overline{\mathfrak{T}}_a. \end{cases}$$

Ferner ist, wenn wir in der zweiten Formel 78):

$$\overline{\mathfrak{U}}_a = W_a + (\overline{\mathfrak{U}}_a - W_a)$$

setzen:

$$\overline{\mathfrak{T}}_a = T_a + 2 \int\limits_{\omega} (\overline{\mathfrak{U}}_a - W_a) \frac{\partial W_a}{\partial \nu} \, d\omega$$

$$+ \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial (\overline{\mathfrak{U}}_a - W_a)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\overline{\mathfrak{U}}_a - W_a)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (\overline{\mathfrak{U}}_a - W_a)}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau;$$

nun verschwindet das zweite Glied rechts; denn es ist an der Fläche ω:

$$\overline{\mathfrak{U}}_a - W_a = \Gamma,$$

und:

$$\int\limits_{\omega} \frac{\partial W_a}{\partial \nu} \, d\omega = 0,$$

somit folgt:

$$80) \quad T_a \leqq \overline{\mathfrak{T}}_a.$$

Andererseits folgt, wenn wir in der Formel:

$$T_i' = \int\limits_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial W_i'}{\partial x'} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_i'}{\partial y'} \right)^2 + \left(\frac{\partial W_i'}{\partial z'} \right)^2 \right] d\tau'$$

die Substitution:

$$W_i' = \overline{\mathfrak{U}}_i' + (W_i' - \overline{\mathfrak{U}}_i')$$

machen:

$$T_i' = \overline{\mathfrak{T}}_i' - 2 \int\limits_{(R)} (W_i' - \overline{\mathfrak{U}}_i') \frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i'}{\partial \nu} \, d\omega$$

$$+ \int\limits_{\tau_i'} \left[\left(\frac{\partial (W_i' - \overline{\mathfrak{U}}_i')}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial (W_i' - \overline{\mathfrak{U}}_i')}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial (W_i' - \overline{\mathfrak{U}}_i')}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau;$$

nun verschwindet das zweite Glied rechts; denn es ist an der Kugelfläche (R):

$$W_i' - \overline{\mathfrak{U}}_i' = -\Gamma,$$

und:

$$\int\limits_{(R)} \frac{\partial \overline{\mathfrak{U}}_i'}{\partial \nu} \, d\omega = 0,$$

somit folgt:

$$81) \quad \overline{\mathfrak{T}}_i' \leqq T_i'.$$

Die Ungleichungen 66), 79), 80), 81) gestatten uns, einen weiteren wichtigen Schluss zu ziehen:

§ 6.

Es folgt aus der ersten Ungleichung 66) und der Ungleichung 81):

$$82)\quad T_i \geqq \frac{1}{\mathfrak{G}} T_i' \geqq \frac{1}{\mathfrak{G}} \mathfrak{T}_i'.$$

Andererseits folgt aus der Ungleichung 80) und der zweiten Ungleichung 79):

$$83)\quad T_a \leqq \mathfrak{T}_a \leqq \mathfrak{G} \mathfrak{T}_a'.$$

Wir dividieren 82) durch 83), und es folgt:

$$84)\quad \frac{T_i}{T_a} \geqq \frac{1}{\mathfrak{G}^2} \cdot \frac{\mathfrak{T}_i'}{\mathfrak{T}_a'}.$$

Nach VIb) ist nun:

$$85)\quad \frac{\mathfrak{T}_i'}{\mathfrak{T}_a'} \geqq \frac{1}{2},$$

somit:

$$86)\quad T_i \geqq \frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{G}^2} T_a.$$

VIIb) Bei den Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes VIIa) besteht stets die Ungleichung:

$$T_i \geqq \frac{1}{2} \frac{1}{\mathfrak{G}^2} T_a.$$

§ 7.

Wir bilden jetzt das Integral:

$$87)\quad S = \int\limits_{\omega} (W_i - C)^2 \, d\omega = \int\limits_{\omega} (W_a - C)^2 \, d\omega,$$

wo C durch die Gleichung:

$$88)\quad \int\limits_{\omega} (W_i - C) \, d\omega = \int\limits_{\omega} (W_a - C) \, d\omega = 0$$

definiert sei, und es sei $d\omega'$ das Oberflächenelement, in welches $d\omega$ durch die Transformation 59) übergeht, also:

$$89)\quad d\omega' = \frac{R^2}{\mathfrak{R}^2(\theta, \varphi)} \cos\psi \cdot d\omega,$$

wo ψ den Winkel vorstellt, den die Richtung

$$d\omega \longrightarrow 0$$

mit der inneren Normale in $d\omega$ bildet, so dass:

$$90)\quad 0 <^{*)} \cos\psi \leqq 1.$$

Es ist dann nach 87) und 89):

$$91)\quad \frac{\mathfrak{R}_1^{\,2}}{R^2} S' \leqq S \leqq \frac{\mathfrak{R}_2^{\,2}}{R^2 \cos\psi_0} \cdot S',$$

wenn:

$$92)\quad S' = \int\limits_{(R)} (W_i - C)^2\, d\omega',$$

$\mathfrak{R}_1$ den kleinsten, $\mathfrak{R}_2$ den gröſsten Radiusvektor von ω vorstellt und $\cos\psi_0$ das kleinste $\cos\psi$ ist, so dass wiederum:

$$93)\quad 0 <^{*)} \cos\psi_0 \leqq 1.$$

Es sei nun die Konstante $\mathfrak{C}$ durch die Gleichung definiert:

$$94)\quad \int\limits_{(R)} (W_i - \mathfrak{C})\, d\omega' = 0,$$

dann ist nach VIc) das Integral:

$$95)\quad \mathfrak{S}' = \int\limits_{(R)} (W_i - \mathfrak{C})^2\, d\omega' \leqq R \cdot \mathfrak{T}_i',$$

wo $\mathfrak{T}_i'$ das in § 3 durch die erste Formel 68) definierte Integral vorstellt. Andererseits ist, wenn wir:

$$96)\quad \mathfrak{S} = \int\limits_{\omega} (W_i - \mathfrak{C})^2\, d\omega$$

setzen, analog 91):

$$97)\quad \frac{\mathfrak{R}_1^{\,2}}{R^2} \mathfrak{S}' \leqq \mathfrak{S} \leqq \frac{\mathfrak{R}_2^{\,2}}{R^2 \cos\psi_0} \mathfrak{S}'.$$

Schlieſslich ist:

$$98)\quad S \leqq \mathfrak{S},$$

---

*) Man beachte das strenge Zeichen.

da das Integral S bei variablem C gerade dann ein Minimum hat, wenn C der Gleichung 88) genügt.

Die Ungleichungen 95), 97), 98) gestatten uns nun, in Verbindung mit den Ungleichungen 66), 67) einen dritten wichtigen Schluss zu ziehen.

§ 8.

Es folgt aus 98), 97), 95):

$$99)\quad S \leqq \mathfrak{S} \leqq \frac{\mathfrak{R}_2^2}{R^2 \cos\psi_0}\,\mathfrak{S}' \leqq \frac{\mathfrak{R}_2^2}{R \cos\psi_0}\,\mathfrak{T}_i';$$

andererseits ist nach der ersten Ungleichung 67) und der ersten Ungleichung 66):

$$100)\quad \mathfrak{T}_i' \leqq T_i' \leqq \mathfrak{G}\, T_i,$$

es ergiebt sich so aus 99) und 100):

$$101)\quad S \leqq \frac{\mathfrak{G}\cdot\mathfrak{R}_2^2}{R\cos\psi_0}\, T_i.$$

VIIc) Bei den Voraussetzungen und Bezeichnungen des Satzes VIIa) erfüllt das Integral:

$$S = \int\limits_{\omega} (W_i - C)^2\, d\omega = \int\limits_{\omega} (W_a - C)^2\, d\omega,$$

in dem die Konstante C durch die Gleichung:

$$\int\limits_{\omega} (W_i - C)\, d\omega = \int\limits_{\omega} (W_a - C)\, d\omega = 0$$

definiert ist, die Ungleichung:

$$S \leqq \alpha \cdot T_i,$$

wo α eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Länge ist.

2. Kapitel.

Die Neumannsche Methode des arithmetischen Mittels.

§ 1.

Es sei f eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf der Fläche ω, seine ersten Ableitungen seien auf den stetig gekrümmten Teilen von ω eindeutig und stetig, seine zweiten*) Ableitungen endlich.

Wir bilden successive die folgenden Flächenintegrale:

$$102)\quad \begin{cases} \mathfrak{W}_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega f\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ \mathfrak{W}_2 = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\omega (\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i})\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ \mathfrak{W}_3 = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\omega (\mathfrak{W}_{2a} + \mathfrak{W}_{2i})\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ \dots\dots\dots\dots \\ \mathfrak{W}_n = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\omega (\mathfrak{W}_{n-1a} + \mathfrak{W}_{n-1i})\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{cases}$$

wo ν stets die innere Normale von $d\omega$ und

$$\mathfrak{W}_{ja} \text{ resp. } \mathfrak{W}_{ji}, \quad j = 1, 2 \dots n$$

die Randwerte der Integrale $\mathfrak{W}_j$ an der äufseren resp. inneren Seite von ω vorstellen und unter n von vornherein eine grofse ganze Zahl verstanden werde.

---

*) Die Untersuchungen dieses Kapitels bleiben in gleicher Weise gültig, falls f auf ω eindeutig und stetig ist, seine ersten Ableitungen in endlichen Entfernungen von einer endlichen Zahl von Trennungskurven regulär sind, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho\,\frac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho), \quad \varrho\,\frac{\partial}{\partial \nu}\int_\omega f\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = \Delta(\varrho)\;(^{15})$$

erfüllt sind.

Die Funktionen 102) erfüllen nach IVb) des I. Teiles die folgenden Relationen:

$$103)\left\{\begin{array}{l}\mathfrak{W}_{1a}-\mathfrak{W}_{1i}=2f,\\ \mathfrak{W}_{2a}-\mathfrak{W}_{2i}=-(\mathfrak{W}_{1a}+\mathfrak{W}_{1i}),\\ \mathfrak{W}_{3a}-\mathfrak{W}_{3i}=-(\mathfrak{W}_{2a}+\mathfrak{W}_{2i}),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ \mathfrak{W}_{na}-\mathfrak{W}_{ni}=-(\mathfrak{W}_{n-1a}+\mathfrak{W}_{n-1i}).\end{array}\right.$$

Wir addieren diese Formeln 103), dann folgt:

$$2\sum_1^n{}^j\,\mathfrak{W}_{ja}=2f+\mathfrak{W}_{na}+\mathfrak{W}_{ni},$$

oder:

$$104)\quad \left|\sum_1^n{}^j\,\mathfrak{W}_j\right|_a=f+\frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{na}+\mathfrak{W}_{ni}).$$

Multiplizieren wir dagegen die Formeln 103) resp. mit

$$(-1),\quad(+1),\quad(-1),\ \ldots$$

allgemein die jte Formel mit $(-1)^j$ und addieren, so ergiebt sich:

$$-\sum_1^n{}^j\,(-1)^j\,\mathfrak{W}_{ji}=-2f-(-1)^n\,(\mathfrak{W}_{na}+\mathfrak{W}_{ni}),$$

oder:

$$105)\quad \left|\sum_1^n{}^j\,(-1)^j\,\mathfrak{W}_j\right|_i=f+\frac{1}{2}(-1)^n\,(\mathfrak{W}_{na}+\mathfrak{W}_{ni}).$$

Die Gleichungen 104) und 105) kann man auch so schreiben:

$$106)\quad \frac{1}{2}\sum_1^n{}^j\,(\mathfrak{W}_j+\mathfrak{W}_{j-1})_a=f+\frac{1}{4}\left[\mathfrak{W}_{na}+\mathfrak{W}_{ni}+\mathfrak{W}_{n-1a}+\mathfrak{W}_{n-1i}\right],$$

$$107)\quad \frac{1}{2}\sum_1^n{}^j\,(-1)^j\,(\mathfrak{W}_j-\mathfrak{W}_{j-1})_i=f+\frac{1}{4}(-1)^n\left[\mathfrak{W}_{na}+\mathfrak{W}_{ni}-\mathfrak{W}_{n-1a}-\mathfrak{W}_{n-1i}\right],$$

indem man das noch nicht definierte:

$$108)\quad \mathfrak{W}_0 = 0$$

setzt.

Die Formeln 107) zeigen, dass, falls wir nachweisen können, dass die Reihen:

$$\sum_1^\infty {}_j (\mathfrak{W}_j + \mathfrak{W}_{j-1}) \text{ im Aufsenraume,}$$

$$\sum_1^\infty {}_j (-1)^j (\mathfrak{W}_j - \mathfrak{W}_{j-1}) \text{ im Innenraume}$$

die Eigenschaften von allgemeinen Potentialfunktionen haben, und dass mit wachsendem n an der Fläche ω:

$$\mathfrak{W}_{na} + \mathfrak{W}_{ni} + \mathfrak{W}_{n-1a} + \mathfrak{W}_{n-1i}$$

gegen eine bestimmte endliche Konstante $4C$,

$$\mathfrak{W}_{na} + \mathfrak{W}_{ni} - \mathfrak{W}_{n-1a} - \mathfrak{W}_{n-1i}$$

gegen null konvergiert, die Funktionen:

$$109)\quad U_a = \frac{1}{2} \sum_1^\infty {}_j (\mathfrak{W}_j + \mathfrak{W}_{j-1}) \text{ im Aufsenraume,}$$

$$110)\quad U_i = \frac{1}{2} \sum_1^\infty {}_j (-1)^j (\mathfrak{W}_j - \mathfrak{W}_{j-1}) \text{ im Innenraume}$$

allgemeine Potentialfunktion des Aufsen- resp. Innenraumes von ω vorstellen, welche an der Fläche ω die Relationen erfüllen:

$$111)\quad \begin{cases} U_a = f + C, \\ U_i = f. \end{cases}$$

Wir werden im folgenden diese Konvergenzbeweise führen.

§ 2.

Wir setzen:

$$112)\quad \left\{\begin{array}{l} W_{0a} = \mathfrak{W}_1 + \mathfrak{W}_0, \\ W_{1a} = \mathfrak{W}_2 + \mathfrak{W}_1, \\ W_{2a} = \mathfrak{W}_3 + \mathfrak{W}_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume,}$$

$$113)\quad \left.\begin{array}{l} W_{0i} = \mathfrak{W}_1 - \mathfrak{W}_0, \\ W_{1i} = \mathfrak{W}_2 - \mathfrak{W}_1, \\ W_{2i} = \mathfrak{W}_3 - \mathfrak{W}_2, \\ \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \text{ im Innenraume.}$$

Wir behaupten, dass je zwei Funktionen

$$W_{ji} \text{ und } W_{ja}, \quad j = 1, 2 \ldots$$

die Voraussetzungen des Satzes VIIa) erfüllen. Denn erstens ist an der Fläche ω:

$$W_{ja} = W_{ji}, \quad j = 1, 2 \ldots$$

da nach 103) an der Fläche ω

$$| \mathfrak{W}_j + \mathfrak{W}_{j-1} |_a = | \mathfrak{W}_j - \mathfrak{W}_{j-1} |_i.$$

Ferner ergiebt sich durch successive Anwendung des Satzes VIIIa) des I. Teiles und des Satzes 5b) in Anm. ([24]) auf die Funktionen $\mathfrak{W}_1 \, \mathfrak{W}_2 \ldots$, dass ihre ersten tangentialen Ableitungen an der Fläche ω regulär sind, solange man sich in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen bestehen:

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{W}_i}{\partial h} = \varDelta(\varrho),$$

$$\varrho \frac{\partial \mathfrak{W}_a}{\partial h} = \varDelta(\varrho);$$

endlich genügen W_{0a} und W_{0i} (d. i. $\mathfrak{W}_1$) nach IVc) des I. Teiles [resp.*) nach Voraussetzung und 5a) in ([24])] der Bedingung, dass in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven

$$\frac{\partial W_{0a}}{\partial \nu} \text{ und } \frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu}$$

eindeutig und stetig sind und bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \frac{\partial W_{0a}}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho),$$

$$\varrho \frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho)$$

*) Bei den Voraussetzungen Anm. S. 248).

erfüllen; es folgt daraus successive die Gültigkeit der Formeln*) ($j = 1, 2 \ldots$):

$$114)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{W}_{ja} &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_{ja}}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \mathfrak{W}_{ja}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ 0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{aligned}\right| \text{im Aufsen-raume,}$$

$$115)\quad \left\{\begin{aligned} \mathfrak{W}_{ji} &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \mathfrak{W}_{ji}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ 0 &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_{ja}}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \mathfrak{W}_{ja}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \end{aligned}\right| \text{im Innen-raume}$$

und der aus ihnen durch Addition folgenden ($j = 1, 2 \ldots$):

$$116)\quad \left\{\begin{aligned} &\left.\begin{matrix} \mathfrak{W}_{j+1\,a} + \mathfrak{W}_{ja} \\ W_{ja} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}{}^{**)}\frac{d\omega}{r}, \\ &\left.\begin{matrix} \mathfrak{W}_{j+1\,i} - \mathfrak{W}_{ji} \\ W_{ji} \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r}; \end{aligned}\right.$$

diese Formeln 116) ergeben uns (mit Hilfe des Satzes VIIIb des I. Teiles) successive, dass die

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu},\ \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu},\ \ldots,$$

somit auch die

$$\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} \text{ und } \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu},\ j = 1, 2 \ldots$$

dieselben Bedingungen erfüllen, wie die

$$\frac{\partial W_{0i}}{\partial \nu} \text{ und } \frac{\partial W_{0a}}{\partial \nu},$$

---

*) Zusatz zu I a) bis I d) (S. 219), unter Berücksichtigung des Zusatzes 4 zu VIII a) in Anm. (23).

**) Dass $\frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathfrak{W}_{ja}}{\partial \nu}$, folgt, da $\frac{\partial \mathfrak{W}_{0i}}{\partial \nu} = \frac{\partial \mathfrak{W}_{0a}}{\partial \nu}$ nach IV c) des I. Teiles resp. 5 a) in Anm. (24), successive aus 114), 115).

dass sie in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven eindeutig und stetig sind und bei genügender Annäherung an dieselben den Relationen:

$$117)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho), \\ \varrho \dfrac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho), \end{cases} \qquad j = 1, 2 \ldots$$

genügen.

Damit sind thatsächlich alle Voraussetzungen nachgewiesen, welche für die Gültigkeit des Satzes VIIa) (sowie VIIb und VIIc) bestehen müssen, und es ergiebt sich aus diesen Sätzen das folgende Resultat:

Definieren wir die Gröfsen T_{ji}, T_{ja}, S_j durch die Formeln:

$$118)\quad \begin{cases} T_{ji} = \displaystyle\int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \quad j = 1, 2 \ldots \\ T_{ja} = \displaystyle\int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \quad j = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

$$119)\quad \begin{cases} S_j = \displaystyle\int\limits_{\omega} (W_j - C_j)^2 \, d\omega, \quad j = 1, 2 \ldots \\ \displaystyle\int\limits_{\omega} (W_j - C_j) \, d\omega = 0, \quad j = 1, 2 \ldots \end{cases}$$

so bestehen die Ungleichungen:

$$120)\quad \frac{1}{2\mathfrak{G}^2} \leqq \frac{T_{ji}}{T_{ja}} \leqq \mathfrak{G}^2, \quad j = 0,^{*)}\, 1, 2 \ldots$$

$$121)\quad S_j \leqq \alpha T_{ji}, \quad j = 0,^{*)}\, 1, 2 \ldots$$

wo $\mathfrak{G}$ eine endliche Zahl, α eine endliche Länge vorstellen, die beide lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängen.

---

*) Wir können, indem wir den Fall $f = \text{const.}$ ausschliefsen, bei geeigneter Wahl von $\mathfrak{G}$ und α die Formeln auch für $j = 0$ aufstellen.

§ 3.

Die Formeln 116) gestatten noch den folgenden Schluss:

Es ist in irgend welcher (auch unendlich kleiner) Entfernung von den Trennungskurven:

$$122)\quad \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} = 2\,\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}, \quad j = 1, 2 \ldots;$$

andererseits ist nach den Formeln 112) und 113):

$$\frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} + \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} = 2\,\frac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu}, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

oder:

$$123)\quad \frac{\partial W_{j-1a}}{\partial \nu} + \frac{\partial W_{j-1i}}{\partial \nu} = 2\,\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}, \quad j = 1, 2 \ldots$$

Es ist also in irgend welcher (auch unendlich kleiner) Entfernung von den Trennungskurven:

$$124)\quad \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_{j-1a}}{\partial \nu} + \frac{\partial W_{j-1i}}{\partial \nu}, \quad j = 1, 2 \ldots$$

Wir multiplizieren diese Gleichung mit W_k $(k = 0, 1, 2 \ldots)$ und integrieren über die Oberfläche ω, dann folgt:

$$\int\limits_\omega W_k \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu}\,d\omega - \int\limits_\omega W_k \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu}\,d\omega = \int\limits_\omega W_k \frac{\partial W_{j-1a}}{\partial \nu}\,d\omega + \int\limits_\omega W_k \frac{\partial W_{j-1}}{\partial \nu}\,d\omega$$

oder, wenn wir allgemein:

$$125)^{*)}\quad \left\{\begin{aligned} T_i^{j,k} &= \int\limits_{\tau_i}\left[\frac{\partial W_{ji}}{\partial x}\frac{\partial W_{ki}}{\partial x} + \frac{\partial W_{ji}}{\partial y}\frac{\partial W_{ki}}{\partial y} + \frac{\partial W_{ji}}{\partial z}\frac{\partial W_{ki}}{\partial z}\right] d\tau, \\ T_a^{j,k} &= \int\limits_{\tau_a}\left[\frac{\partial W_{ja}}{\partial x}\frac{\partial W_{ka}}{\partial x} + \frac{\partial W_{ja}}{\partial y}\frac{\partial W_{ka}}{\partial y} + \frac{\partial W_{ja}}{\partial z}\frac{\partial W_{ka}}{\partial z}\right] d\tau \end{aligned}\right\} \begin{aligned} j &= 0, 1, 2 \ldots \\ k &= 0, 1, 2 \ldots \end{aligned}$$

setzen:

---

*) Nach den Definitionen 125) ist offenbar:

$$T_i^{j,k} = T_i^{k,j}, \quad T_a^{j,k} = T_a^{k,j}.$$

126) $T_a^{j,k} + T_i^{j,k} = T_a^{j-1,k} - T_i^{j-1,k}$, $\begin{matrix} j = 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2, \ldots \end{matrix}$

Wir vertauschen hierin:

$$\begin{matrix} j \text{ mit } k+1, \\ k \text{ mit } j-1, \end{matrix}$$

dann wird:

$$T_a^{k+1,j-1} + T_i^{k+1,j-1} = T_a^{k,j-1} - T_i^{k,j-1}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

durch Vertauschung der Indices (s. Anm. vorige Seite):

$$T_a^{j-1,k+1} + T_i^{j-1,k+1} = T_a^{j-1,k} - T_i^{j-1,k}, \quad \begin{matrix} j = 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

schliefslich nach 126):

127) $T_a^{j,k} + T_i^{j,k} = T_a^{j-1,k+1} + T_i^{j-1,k+1}$, $\begin{matrix} j = 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$

Wir vertauschen andererseits in 126):

$$\begin{matrix} j \text{ mit } j-1, \\ k \text{ mit } k+1, \end{matrix}$$

dann wird:

$$T_a^{j-1,k+1} + T_i^{j-1,k+1} = T_a^{j-2,k+1} - T_i^{j-2,k+1}, \quad \begin{matrix} j = 2, 3 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

oder nach der unmittelbar vor 127) stehenden Formel:

$$T_a^{j-1,k} - T_i^{j-1,k} = T_a^{j-2,k+1} - T_i^{j-2,k+1}, \quad \begin{matrix} j = 2, 3 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

schliefslich durch Vertauschung von

$$j-1 \text{ mit } j$$

128) $T_a^{j,k} - T_i^{j,k} = T_a^{j-1,k+1} - T_i^{j-1,k+1}$, $\begin{matrix} j = 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$

Aus den Formeln 127) und 128) folgt einzeln:

$$129) \left\{ \begin{matrix} T_i^{j,k} = T_i^{j-1,k+1}, \\ T_a^{j,k} = T_a^{j-1,k+1}, \end{matrix} \right\} \begin{matrix} j = 1, 2 \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \end{matrix}$$

und hieraus successive:

$$130) \left\{ \begin{matrix} T_i^{j,k} = T_i^{j-\mathfrak{l},k+\mathfrak{l}}, \\ T_a^{j,k} = T_a^{j-\mathfrak{l},k+\mathfrak{l}}, \end{matrix} \right\} \begin{matrix} j = \mathfrak{l}, \mathfrak{l}+1, \ldots \\ k = 0, 1, 2 \ldots \\ \mathfrak{l} = 0, 1, 2 \ldots j \end{matrix}$$

so dass alle Integrale:

$$131a)\quad T_i{}^m = \int_{\tau_i} \left[\frac{\partial W_{ji}}{\partial x} \frac{\partial W_{ki}}{\partial x} + \frac{\partial W_{ji}}{\partial y} \frac{\partial W_{ki}}{\partial y} + \frac{\partial W_{ji}}{\partial z} \frac{\partial W_{ki}}{\partial z} \right] d\tau,$$

$$j = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

in denen $j + k$ ein und dieselbe Zahl m ist, denselben Wert besitzen, und ebenso alle Integrale:

$$131b)\quad T_a{}^m = \int_{\tau_a} \left[\frac{\partial W_{ja}}{\partial x} \frac{\partial W_{ka}}{\partial x} + \frac{\partial W_{ja}}{\partial y} \frac{\partial W_{ka}}{\partial y} + \frac{\partial W_{ja}}{\partial z} \frac{\partial W_{ka}}{\partial z} \right] d\tau,$$

$$j = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$
$$k = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

für:

$$132)\quad j + k = m.$$

Im besonderen ist nach den Bezeichnungen 131a), 131b):

$$133)\quad \left\{ \begin{array}{l} T_{ji} = T_i{}^{2j}, \\ T_{ja} = T_a{}^{2j}, \end{array} \right\} j = 0,\ 1,\ 2 \ldots$$

und die Relation 126) lässt sich in der Form schreiben:

$$134)\quad T_a{}^m + T_i{}^m = T_a{}^{m-1} - T_i{}^{m-1},\ m = 1,\ 2 \ldots$$

§ 4.

Bilden wir nach Maſsgabe der Formeln 102) successive die auf einander folgenden Funktionen

$$\overline{\mathfrak{W}}_1,\ \overline{\mathfrak{W}}_2,\ \ldots$$

welche aus:

$$\mathfrak{W}_1,\ \mathfrak{W}_2\ \ldots$$

hervorgehen, wenn man unter $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ zwei beliebige Gröſsen versteht und in der ersten Formel 102)

$$f \text{ mit } \mathcal{A} f - \frac{1}{2} \mathcal{B} (\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i})$$

vertauscht; es folgt dann successive:

$$135)\begin{cases} \overline{\mathfrak{W}}_1 = A\,\mathfrak{W}_1 + B\,\mathfrak{W}_2, \\ \overline{\mathfrak{W}}_2 = A\,\mathfrak{W}_2 + B\,\mathfrak{W}_3, \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$

und für die entsprechenden Funktionen:

$$\overline{W}_{0a},\quad \overline{W}_{1a},\quad \overline{W}_{2a},\quad \dots$$
$$\overline{W}_{0i},\quad \overline{W}_{1i},\quad \overline{W}_{2i},\quad \dots$$

nach 112), 113):

$$136)\left\{\begin{aligned} \overline{W}_{ja} &= A\,W_{ja} + B\,W_{j+1a}, \\ \overline{W}_{ji} &= A\,W_{ji} + B\,W_{j+1i}. \end{aligned}\right\} j = 0,\ 1,\ 2 \dots$$

Setzen wir:

$$137)\begin{cases} \overline{T}_{ji} = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \overline{W}_{ji}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{W}_{ji}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{W}_{ji}}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau, \\ \overline{T}_{ja} = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial \overline{W}_{ja}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{W}_{ja}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \overline{W}_{ja}}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau, \end{cases}$$

so ist analog der Formel 120):

$$138)\quad \frac{1}{2\mathfrak{G}^2} \overline{\overline{<}} \frac{\overline{T}_{ji}}{\overline{T}_{ja}} \overline{\overline{<}} \mathfrak{G}^2 \overline{\overline{<}} 2\mathfrak{G}^2,\quad j = 0, 1, 2 \dots$$

wo $\mathfrak{G}$ eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende Zahl ist.

Nun folgt aus 136) und 137):

$$139)\left\{\begin{aligned} \overline{T}_{ji} &= A^2 T_i^{2j} + 2AB\,T_i^{2j+1} + B^2 T_i^{2j+2}, \\ \overline{T}_{ja} &= A^2 T_a^{2j} + 2AB\,T_a^{2j+1} + B^2 T_a^{2j+2}, \end{aligned}\right\} j = 0,\ 1,\ 2 \dots$$

bei Anwendung der Bezeichnungen 131a), 131b), und es bestehen nach 138), 139) somit für beliebige A, B die Ungleichungen:

$$
140)\quad \left.\begin{cases}
A^2\left[T_a^{2j} - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_i^{2j}\right] \\
\qquad + 2AB\left[T_a^{2j+1} - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_i^{2j+1}\right] \\
\qquad + B^2\left[T_a^{2j+2} - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_i^{2j+2}\right] \geqq 0, \\
A^2\left[T_i^{2j} - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_a^{2j}\right] \\
\qquad + 2AB\left[T_i^{2j+1} - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_a^{2j+1}\right] \\
\qquad + B^2\left[T_i^{2j+2} - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_a^{2j+2}\right] \geqq 0.
\end{cases}\right\}\; j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots
$$

Wir vertauschen in der zweiten Ungleichung B mit $(-B)$ und addieren sie dann zu der ersten hinzu, dann folgt wieder für beliebige A, B:

$$
141)\quad \left.\begin{cases}
A^2\left(1 - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right)(T_a^{2j} + T_i^{2j}) \\
\qquad + 2AB\left(1 + \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right)(T_a^{2j+1} - T_i^{2j+1}) \\
\qquad + B^2\left(1 - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right)(T_a^{2j+2} + T_i^{2j+2}) \geqq 0.
\end{cases}\right\}\; j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots
$$

Nun ist nach 134):

$$
T_a^{2j+2} + T_i^{2j+2} = T_a^{2j+1} - T_i^{2j+1},
$$

und wir können daher 141) folgendermaſsen schreiben $(j = 0, 1, 2 \ldots)$:

$$
142)\quad \begin{cases}
\left(1 - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right)(T_a^{2j} + T_i^{2j})\left[A + B\,\dfrac{2\mathfrak{G}^2 + 1}{2\mathfrak{G}^2 - 1}\cdot\dfrac{T_a^{2j+2} + T_i^{2j+2}}{T_a^{2j} + T_i^{2j}}\right]^2 \\
\quad + B^2\,(T_a^{2j+2} + T_i^{2j+2})\cdot\left(1 - \dfrac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right)\left[1 - \left(\dfrac{2\mathfrak{G}^2 + 1}{2\mathfrak{G}^2 + 1}\right)^2 \right. \\
\quad \left. \cdot\,\dfrac{T_a^{2j+2} + T_i^{2j+2}}{T_a^{2j} + T_i^{2j}}\right] \geqq 0.
\end{cases}
$$

Da $\mathcal{A}$ und B beliebig sind, kann man durch geeignete Wahl derselben die erste Zeile zum Verschwinden bringen, es folgt dann:

$$1-\left(\frac{2\mathfrak{G}^2+1}{2\mathfrak{G}^2-1}\right)^2 \frac{T_a{}^{2j+2}+T_i{}^{2j+2}}{T_a{}^{2j}+T_i{}^{2j}} \geqq 0,$$

oder bei Wiedereinführung der T_{ji}, T_{ja} (vgl. 133)):

$$143)\quad \frac{T_{j+1a}+T_{j+1i}}{T_{ja}+T_{ji}} \leqq \left(\frac{2\mathfrak{G}^2-1}{2\mathfrak{G}^2+1}\right)^2, \quad j=0,1,2\ldots$$

und hieraus successive:

$$144)\quad T_{ja}+T_{ji} \leqq (T_{0a}+T_{0i})\left(\frac{2\mathfrak{G}^2-1}{2\mathfrak{G}^2+1}\right)^{2j}, \quad j=0,1,2\ldots$$

oder:

$$145)\quad T_{ja}+T_{ji} \leqq (T_{0a}+T_{0i})\, L^{2j}, \quad j=0,1,2\ldots$$

wo L einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängt.

Addiert man zu resp. subtrahiert man von der Ungleichung 145) die aus 120) folgenden Ungleichungen:

$$\frac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_{ji} - T_{ja} \leqq 0,$$

$$T_{ji} - \frac{1}{2\mathfrak{G}^2}\, T_{ja} \geqq 0,$$

so folgt:

$$146)\quad \left.\begin{aligned} \left(1+\frac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right) T_{ji} &\leqq (T_{0a}+T_{0i})\, L^{2j}, \\ \left(1+\frac{1}{2\mathfrak{G}^2}\right) T_{ja} &\leqq (T_{0a}+T_{0i})\, L^{2j}. \end{aligned}\right\} j=0,1,2\ldots$$

Wir gelangen so zu dem Resultat:

Versteht man unter $W_0\, W_1\, W_2 \ldots$ die durch die Formeln 112), 113) definierten Funktionen und unter T_{ji}, T_{ja} die Integrale:

$$\left.\begin{aligned} T_{ji} &= \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W_{ji}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ T_{ja} &= \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial W_{ja}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \end{aligned}\right\} j=0,1,2\ldots$$

so bestehen die Ungleichungen:

$$147)\quad \begin{Bmatrix} T_{ji} \\ T_{ja} \end{Bmatrix} \overline{\overline{<}}\, A \cdot L^{2j}, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

wo A eine endliche Konstante, L einen lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängenden echten Bruch bezeichnet.

Es ist somit auch (nach 121)):

$$148)\quad \int_{\omega} (W_j - C_j)^2 \, d\omega \overline{\overline{<}}\, B \cdot L^{2j}, \; j = 0, \; 1, \; 2 \ldots$$

wo wiederum B $(= \alpha \cdot A)$ eine endliche Gröfse ist und die C_j die durch die Gleichung:

$$149)\quad \int_{\omega} (W_j - C_j) \, d\omega = 0, \; j = 0, \; 1, \; 2 \ldots$$

bestimmten Konstanten vorstellen.

§ 5.

Wir brauchen noch die folgenden Integrale:

$$150)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_0 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\omega} (W_0 - C_0) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \, d\omega, \\ \mathfrak{U}_1 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\omega} (W_1 - C_1) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \, d\omega, \\ \mathfrak{U}_2 = \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int_{\omega} (W_2 - C_2) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} \, d\omega, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{cases}$$

von diesen wollen wir zunächst mit Hilfe der Formeln 148) beweisen, dass ihre Werte auf der Fläche ω selbst, gleichviel mit welchem Vorzeichen genommen, Glieder einer konvergenten Reihe sind.

Addiert man die ersten Formeln 114) und 115) resp. zu denjenigen Formeln hinzu, welche aus ihnen durch Vertauschung

von j mit j + 1 entstehen, so folgt mit Rücksicht auf die Definition der W_j und die Formeln 116), 150):

$$151)\quad \begin{cases} \mathfrak{U}_{ja} = W_{j+1a} - W_{ja}, \text{ im Aufsenraume} \\ \mathfrak{U}_{ji} + 2C_j = W_{j+1i} + W_{ji}, \text{ im Innenraume,} \end{cases}$$

und auf der Fläche ω selbst ist:

$$152)\quad \mathfrak{U}_{j\omega} \equiv \frac{1}{2}(\mathfrak{U}_{ja} + \mathfrak{U}_{ji}) = W_{j+1} - C_j.$$

$\mathfrak{U}_{j\omega}$, der Wert von $\mathfrak{U}_j$ in einem Punkte (xyz) der Fläche selbst, der zunächst in endlicher Entfernung von den Trennungskurven liege, ist als uneigentliches Integral zu betrachten, und wir können die Fläche ω in 2 Teile teilen

$$\omega_1 \text{ und } \omega - \omega_1,$$

so dass der Teil ω_1 nur endliche Entfernungen von (xyz) hat und in dem Teile $\omega - \omega_1$ $\cos(r\nu)$ in der Form entwickelbar ist:

$$153)\quad \cos(r\nu) = r \cdot F,$$

wo F eine stets endliche Gröfse vorstellt.

Für den ω_1 zugehörigen Teil $\mathfrak{U}_{j\omega_1}$ von $\mathfrak{U}_{j\omega}$ gilt dann die Formel:

$$\mathfrak{U}^2_{j\omega_1} \equiv \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_1}(W_j - C_j)\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right]^2,$$

$$\overline{\overline{<}}\ \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\omega_1}\left[\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\right]^2 d\omega \cdot \int\limits_{\omega_1}(W_j - C_j)^2\,d\omega\ (^{49}),$$

$$\overline{\overline{<}}\ A \cdot \int\limits_{\omega_1}(W_j - C_j)^2\,d\omega\ \overline{\overline{<}}\ A\int\limits_{\omega}(W_j - C_j)^2\,d\omega,$$

wo A eine endliche positive Gröfse vorstellt, oder nach 148):

$$154)\quad \mathfrak{U}^2_{j\omega_1}\ \overline{\overline{<}}\ B \cdot L^{2j},$$

wo wiederum B eine endliche Gröfse vorstellt.

Den von dem anderen Flächenstück

$$\omega - \omega_1$$

herrührenden Teil von $\mathfrak{U}_{j\omega}$:

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega-\omega_1} F\,\frac{W_j - C_j}{r}\,d\omega$$

zerlegen wir in zwei weitere Teile, indem wir in (xyz) die Tangentialebene zu ω legen, in derselben um (xyz) als Centrum einen Kreis mit dem Radius P konstruieren, und den Cylinder, welcher entsteht, wenn man in allen Punkten des Kreises die Lote zur Tangentialebene errichtet.

Die Schnittkurve ς dieses Cylinders mit der Fläche ω*) zerlege $(\omega - \omega_1)$ in zwei Teile

$$\omega_2 \text{ und } \omega_3,$$

von denen ω_3 den Punkt (xyz) enthalte (es sei P genügend klein gewählt, sodass ς völlig innerhalb $\omega - \omega_1$ verlaufe). Die Projektion von ω_2 auf die Tangentialebene sei o_2, die von ω_3 heifse o_3, die

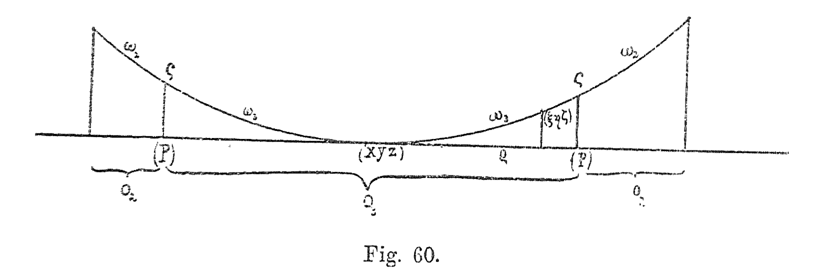


Fig. 60.

Projektion irgend eines Punktes $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche $\omega - \omega_1$ auf die Tangentialebene habe von (xyz) den Abstand ϱ.

Es ist dann der von ω_3 herrührende Teil des Integrales $\mathfrak{U}_{j\,\omega}$:

$$155)\quad \left\{\begin{aligned} &\mathfrak{U}_{j\,\omega_3} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_3} F\,\frac{W_j - C_j}{r}\,d\omega, \\ &\text{abs. } \mathfrak{U}_{j\,\omega_3} \overline{\gtrless}\, \Gamma \cdot \text{abs. Max. } (W_j - C_j) \int\limits_{o_3} \frac{do}{\varrho}, \end{aligned}\right.$$

*) Man kann stets $\omega - \omega_1$ genügend klein (bei Wahrung der Endlichkeit) machen, so dass jedes Lot die Fläche ω nur in einem Punkte schneidet, wenn man die Länge dieser Lote gleichfalls kleiner als eine genügend kleine endliche Länge wählt.

und für den von ω_2 herrührenden Teil gilt die Formel:

$$\mathfrak{U}^2_{j\,\omega_2} = \left[\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega_2} F\,\frac{W_j - C_j}{r}\,d\omega\right]^2$$

$$\leqq \frac{1}{4\pi^2}\int\limits_{\omega_2}\frac{F^2}{r^2}\,d\omega \int\limits_{\omega_2}(W_j - C)^2\,d\omega\,(^{49}),$$

oder:

$$156)\quad \mathfrak{U}^2_{j\,\omega_2} \gtreqless E\cdot L^{2j}\cdot\int\limits_{o_2}\frac{do}{\varrho^2},$$

wo wieder E eine endliche Zahl vorstellt.

Nach 154), 155), 156) ist somit:

$$157)\quad \text{abs.}\,\mathfrak{U}_{j\,\omega} \gtreqless L^j\left[a + b\sqrt{\int\limits_{o_2}\frac{do}{\varrho^2}}\right] + c.\ \text{abs. Max.}\,(W_j - C_j)\int\limits_{o_3}\frac{do}{\varrho},$$

wo a, b, c endliche Gröſsen vorstellen.

Führen wir in der Tangentialebene mit (xyz) als Pol Polarkoordinaten ϱ, φ ein, so ist:

$$do = \varrho\,d\varrho\cdot d\varphi,$$

somit:

$$\int\limits_{o_3}\frac{do}{\varrho} = 2\pi P,$$

$$\int\limits_{o_2}\frac{do}{\varrho^2} = \int\limits_{0}^{\varphi}(\log r - \log P)\,d\varphi,$$

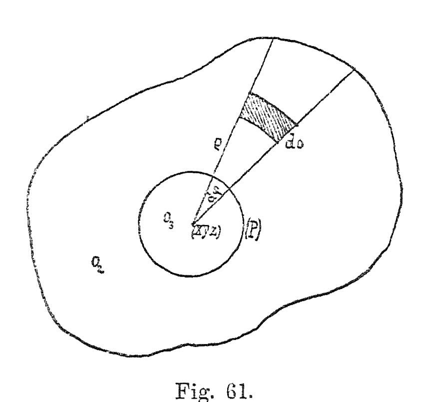


Fig. 61.

wo r eine stets endliche Funktion von φ vorstellt. Wir können hiernach die Ungleichung 157) in der Form schreiben:

$$158)\quad \text{abs.}\,\mathfrak{U}_{j\,\omega} \gtreqless L^j(\alpha + \sqrt{\beta - \gamma\log P}) + c.\ \text{abs. Max.}\,(W_j - C_j)\cdot P,$$

wo α, β, γ, c endliche Gröſsen sind.

Mit Hilfe des Satzes IVa) des I. Teiles (S. 33) resp. seines Zusatzes (S. 72) folgt aus den Formeln 102) successive:

$$159a)\quad \text{abs. } \mathfrak{W}_j \overline{\overline{<}} A^j \cdot \text{abs. Max. } f,$$

somit:

$$159b)\quad \text{abs. } W_j \overline{\overline{<}} 2A^j \cdot \text{abs. Max. } f,$$

$$159c)\quad \text{abs. } (W_j - C_j) \overline{\overline{<}} 4A^j \cdot \text{abs. Max. } f, \text{*)}$$

wo A eine endliche Zahl vorstellt, die wir jedenfalls $>$ L nehmen können.

Setzen wir daher in 158):

$$160)\quad P = \left(\frac{L}{A}\right)^j,$$

so können wir 158) in der Form schreiben:

$$161a)\quad \text{abs. } \mathfrak{U}_{j\omega} \overline{\overline{<}} (\varDelta + \sqrt{B + j\Gamma})\, L^j,$$

wo $\varDelta$, B und Γ endliche positive Gröfsen vorstellen, die von j völlig unabhängig sind, oder auch:

$$161b)\quad \text{abs. } \mathfrak{U}_{j\omega} \overline{\overline{<}} a\lambda^j,$$

wo wieder a eine endliche, von j unabhängige Gröfse, λ einen echten Bruch vorstellt,**)

*) Denn es folgt aus 159b) durch Integration (7) über ω auch:

$$159d)\quad \text{abs. } C_j \overline{\overline{<}} 2A^j \cdot \text{abs. Max. } f.$$

**) Sei nämlich m die erste ganze Zahl, für die

$$\sqrt{B + m\Gamma} > \frac{L\sqrt{\Gamma}}{1 - L} \text{ (im strengen Sinne)},$$

so setze man:

$$161c)\quad \lambda = L\,\frac{\sqrt{B + m\Gamma} + \sqrt{\Gamma}}{\sqrt{B + m\Gamma}}, \quad a = \varDelta + \sqrt{B + m\Gamma},$$

dann ist stets:

$$(\varDelta + \sqrt{B + j\Gamma})\, L^j \overline{\overline{<}} a\lambda^j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

Die Ungleichung ist evident für j = 0, 1, 2 ... m, sie folgt für j = m + 1, ... aus der Überlegung, dass infolge:

$$\sqrt{B + m\Gamma} \overline{\overline{<}} \left(\frac{\sqrt{B + m\Gamma} + \sqrt{\Gamma}}{\sqrt{B + m\Gamma}}\right)^m \cdot \sqrt{B + m\Gamma}$$

auch:

$$\sqrt{B + (m+1)\Gamma} \overline{\overline{<}} \sqrt{B + m\Gamma} + \sqrt{\Gamma}$$

$$\overline{\overline{<}} \left(\frac{\sqrt{B + m\Gamma} + \sqrt{\Gamma}}{\sqrt{B + m\Gamma}}\right)^{m+1} \cdot \sqrt{B + m\Gamma},$$

und so fort.

Endlich ist nach 151):

$$162)\ \mathfrak{U}_{j\,\omega} \equiv \frac{1}{2}(\mathfrak{U}_{j\,a} + \mathfrak{U}_{j\,i}) = W_{j+1} - C_j,$$

somit an der Fläche ω:

$$163)\ \text{abs.}\ (W_{j+1} - C_j) \overline{\overline{<}}\ a \cdot \lambda^j,\ j = 0, 1, 2 \ldots$$

wo immer

$$164)\ \begin{cases} a \text{ eine endliche Größe,} \\ \lambda \text{ einen echten Bruch} \end{cases}$$

vorstellt.

Wir haben diese Ungleichung unter der ausdrücklichen Voraussetzung abgeleitet, dass wir uns in endlicher Entfernung von den Trennungskurven halten, wir wollen nun den Fall in betracht ziehen, dass wir uns einem Punkte der Trennungskurven unendlich nähern.

Sei ϱ der kürzeste Abstand des variabeln Punktes (xyz) von einem Punkte O der Trennungskurven, und wir wollen zur Vereinfachung annehmen, dass der Punkt O von etwaigen Trennungspunkten der Trennungskurven endliche Entfernungen habe — die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall bedarf nach den folgenden Ausführungen keiner weiteren Erläuterung —; von den beiden in O zusammentreffenden Stücken von ω bezeichnen wir dasjenige, auf dem der variable Punkt nicht liegt, mit ω', den Winkel, den die beiden Flächenstücke in O bilden, mit θ und den kürzesten Abstand des variabeln Punktes von ω' mit ϱ_0, dann ist bei genügend kleinem ϱ:

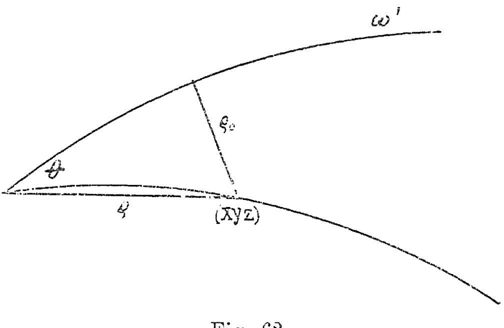


Fig. 62.

$$165)\ \frac{1}{\varrho_0} \overline{\overline{<}}\ \frac{\gamma}{\varrho},$$

wo γ eine von dem Winkel θ abhängige Größe und, da wir den Fall $\theta = 0$ stets ausschließen, stets endlich ist.

Betrachten wir nun in (xyz) das Integral:

$$\mathfrak{U}_{j\omega} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega}(W_j - C_j)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

so wissen wir zunächst nach dem Vorangehenden, dass der absolute Wert des Teiles von $\mathfrak{U}_{j\omega}$, welcher von dem Flächenstück herrührt, auf dem (xyz) liegt, und von irgend welchen Teilen von ω', die von (xyz) eine endliche Entfernung haben,

$$\overline{\overline{<}}\, a\lambda^j$$

ist, wo a eine endliche Gröfse, λ einen echten Bruch vorstellt. Es ist somit:

$$166)\quad \text{abs.}\,\mathfrak{U}_{j\omega} \overline{\overline{<}}\, a\lambda^j + \text{abs.}\int\limits_{\overline{\omega}'}(W_j - C_j)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

wobei wir unter $\overline{\omega}'$ ein endliches Stück von ω' verstehen, von solcher Beschaffenheit, dass der übrigbleibende Teil von ω' von (xyz) nur endliche Entfernungen hat. Nun ist:

$$\text{abs.}\int\limits_{\overline{\omega}'}(W_j - C_j)\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega \overline{\overline{<}} \frac{1}{\varrho_0}\int\limits_{\overline{\omega}'}\text{abs.}\,(W_j - C_j)\,\frac{\text{abs.}\cos(r\nu)}{r}\,d\omega,$$

$$\overline{\overline{<}} \frac{1}{\varrho_0}\sqrt{\int\limits_{\overline{\omega}'}(W_j - C_j)^2\,d\omega\int\limits_{\overline{\omega}'}\frac{\cos^2(r\nu)}{r^2}\,d\omega}\ (^{49})$$

$$\overline{\overline{<}} \frac{c}{\varrho_0}\,L^j,$$

wo c eine endliche Gröfse ist. [Nach 148) und IVa) des I. Teiles.]

Nach 166) wird somit bei genügend kleinem ϱ, wenn man noch die Ungleichung 165) beachtet, abs. $\mathfrak{U}_{j\omega}$ oder:

$$167)\quad \text{abs.}\,(W_{j+1} - C_j) \overline{\overline{<}}\, b\,\frac{\lambda^j}{\varrho},$$

wo b eine von j unabhängige endliche Zahl und λ denselben echten Bruch vorstellt, wie in 163).

Es ist, wenn wir die Formeln 163), 167), 159b) und 159d) zusammenfassen:

$$
168)\quad
\begin{cases}
\text{abs.}\,(W_{j+1} - C_j) \overset{=}{<} a\lambda^j, & \text{Entfernung von den Trennungskurven} \overset{=}{>} \text{als eine endliche Länge } \bar{\alpha}, \\
\text{abs.}\,(W_{j+1} - C_j) \overset{=}{<} b\,\dfrac{\lambda^j}{\varrho}, & P \overset{=}{<} \varrho \overset{=}{<} \bar{\alpha} \\
& (\varrho \text{ kürzeste Entfernung von den Trennungskurven}), \\
\text{abs.}\,(W_{j+1} - C_j) \overset{=}{<} c \cdot A^j, & 0 \overset{=}{<} \varrho < P,
\end{cases}
$$

wo a, b, c endliche Gröſsen vorstellen und P beliebig klein angenommen werden kann. Wir multiplizieren jede der Formeln 168) mit dem Oberflächenelemente $d\omega$ an der Stelle (xyz) und integrieren(⁷) über die ganze Fläche ω, dann folgt noch Division durch ω:

$$169)\quad \text{abs.}\,(C_{j+1} - C_j) \overset{=}{<} \mathcal{A}\lambda^j - B\lambda^j \log P + \Gamma A^j \cdot P,$$

wo wieder $\mathcal{A}$, B, Γ endliche positive Gröſsen vorstellen.

Wir setzen hierin:

$$170)\quad P = \left(\frac{\lambda}{A}\right)^j,$$

dann wird:

$$171\,a)\quad \text{abs.}\,(C_{j+1} - C_j) \overset{=}{<} (\alpha + j \cdot \beta)\,\lambda^j,$$

wo wieder α und β endliche Gröſsen vorstellen, die von j völlig unabhängig sind, oder auch:

$$171\,b)\quad \text{abs.}\,(C_{j+1} - C_j) \overset{=}{<} \gamma \cdot \mathcal{A}^j,$$

wo wieder γ eine endliche, von j unabhängige Gröſse, $\mathcal{A}$ einen echten Bruch vorstellt.*)

---

*) Sei nämlich m die erste ganze Zahl, für die:

$$m > \frac{\lambda}{1-\lambda}, \text{ (im strengen Sinne)}$$

so setze man:

$$171\,c)\quad \mathcal{A} = \lambda\,\frac{m+1}{m}, \quad \gamma = \alpha + m\beta,$$

dann ist stets:

$$(\alpha + j \cdot \beta)\,\lambda^j \overset{=}{<} \gamma \cdot \mathcal{A}^j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

Die Ungleichung ist evident für $j = 0, 1, 2 \ldots m$, sie folgt für $j = m + 1, \ldots$ aus der Überlegung, dass infolge:

$$m \overset{=}{<} \left(\frac{m+1}{m}\right)^m m \text{ auch:}$$

$$m + 1 \overset{=}{<} \left(\frac{m+1}{m}\right)^m m + \left(\frac{m+1}{m}\right)^m \overset{=}{<} \left(\frac{m+1}{m}\right)^{m+1} m,$$

und so fort.

Infolge der früher für T_{ji} T_{ja} erhaltenen Ungleichungen, ist:

$$\lim_{j=\infty} T_{ji} = 0,$$
$$\lim_{j=\infty} T_{ja} = 0,$$

somit im ganzen Aufsen- resp. Innenraume:

$$172\text{a)} \quad \begin{cases} \lim\limits_{j=\infty} W_{ja} = 0, \\ \lim\limits_{j=\infty} W_{ji} = \text{const.} = 0, \text{ (da an der Fläche } \omega \; W_{ja} = W_{ji}), \end{cases}$$

und folglich auch:

$$172\text{b)} \quad \lim_{j=\infty} C_j = 0.$$

Infolge 171b) ist nun die Reihe:

$$C_j \equiv (C_j - C_{j+1}) + (C_{j+1} - C_{j+2}) + \cdots$$

konvergent, und es folgt:

$$\text{abs. } C_j \overline{\gtrless} \gamma \{ \varDelta^j + \varDelta^{j+1} + \ldots \}$$
$$\overline{\gtrless} \frac{\gamma}{1-\varDelta} \varDelta^j,$$

oder:

$$173) \quad \text{abs. } C_j \overline{\gtrless} \Gamma \cdot \varDelta^j, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

wo wiederum Γ eine endliche, von j unabhängige Gröfse vorstellt, und wir können [nach 173) und 171c)] die erste und zweite Ungleichung 168) folgendermafsen schreiben: Es ist an der Fläche ω (für $j = 0, 1, 2 \ldots$):

174)

$\text{abs. } W_{j+1} \overline{\gtrless} A \cdot \varDelta^j$	in endlicher Entfernung von den Trennungskurven,
$\text{abs. } W_{j+1} \overline{\gtrless} B \cdot \frac{\varDelta^j}{\varrho}$,	bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ von den Trennungskurven,

wo wieder A und B endliche, von j unabhängige Gröfsen vorstellen und:

175) $\varDelta$ ein echter Bruch ist.

§ 6.

Die Gleichungen 150) und die Ungleichungen 173), 174) ergeben nunmehr mit Hilfe von Betrachtungen, welche denen des vorigen Paragraphen analog ([50]) sind, die Ungleichungen: Es ist überall im Innen- und Aufsenraume ($j = 0, 1, 2 \ldots$):

176)
$$\text{abs. } \mathfrak{U}_j \overline{\overline{<}}\, \alpha \cdot \Delta^j,$$
in endlicher Entfernung von den Trennungskurven,

$$\text{abs. } \mathfrak{U}_j \overline{\overline{<}}\, \beta \cdot \frac{\Delta^j}{\varrho},$$
bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ von den Trennungskurven, wenn man sich denselben auf ω selbst oder einer Fläche nähert, die mit den Teilen von ω nicht gerade den Winkel null einschliefst,

wo wieder α und β endliche, von j unabhängige Gröfsen vorstellen.

Infolge 176), 173) und 151) sind die Reihen:

$$177) \begin{cases} W_{ji} = (\mathfrak{U}_{ji} + 2 C_j) - (\mathfrak{U}_{j+1i} + 2 C_{j+1}) + (\mathfrak{U}_{j+2i} + 2 C_{j+2}) \ldots \\ W_{ja} = -\mathfrak{U}_{ja} - \mathfrak{U}_{j+1a} - \mathfrak{U}_{j+2a} - \cdots \end{cases}$$

bei endlichen (im übrigen beliebig kleinen) Entfernungen von den Trennungskurven stets konvergent, und es folgt im ganzen Innen- resp. Aufsenraume ($j = 0, 1, 2 \ldots$):

178a)
$$\text{abs. } W_{ji} \overline{\overline{<}}\, a \cdot \Delta^j, \quad \text{abs. } W_{ja} \overline{\overline{<}}\, a \cdot \Delta^j,$$
in endlicher Entfernung von den Trennungskurven,

178b)
$$\text{abs. } W_{ji} \overline{\overline{<}}\, b \cdot \frac{\Delta^j}{\varrho}, \quad \text{abs. } W_{ja} \overline{\overline{<}}\, b \cdot \frac{\Delta^j}{\varrho},$$
bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ von den Trennungskurven, wenn man sich denselben auf ω selbst oder einer Fläche nähert, die mit den Teilen von ω nicht gerade den Winkel null einschliefst,

wo wieder a und b endliche, von j unabhängige Gröfsen vorstellen.

Aus den Ungleichungen 178a) folgt bereits, dass die W_{ji}, W_{ja}, gleichviel mit welchem Vorzeichen genommen, Glieder einer konvergenten Reihe sind, solange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven hält; wir wollen die Endlichkeit der durch solche Reihen dar-

gestellten Funktionen aber auch nachweisen — was aus den Formeln 178b) noch nicht ohne weiteres folgt, — falls wir uns den Trennungskurven unendlich nähern; diese Untersuchungen werden uns zugleich den Beweis für die zweite Behauptung der Neumannschen Methode liefern, dass die durch diese Methode gegebenen Funktionen auch thatsächlich an der Fläche ω die vorgeschriebenen Randwerte f annehmen.

§ 7.

Wir hatten früher (S. 250 und 251) die Formeln:

$$W_{ja} = \mathfrak{W}_{j+1\,a} + \mathfrak{W}_{ja}, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

$$W_{ji} = \mathfrak{W}_{j+1\,i} - \mathfrak{W}_{ji}, \quad j = 0, 1, 2 \ldots$$

Wir summieren jede dieser Formeln über j von 0 bis ∞, nachdem wir die erste noch mit $(-1)^j$ multipliziert haben, dann folgt:

$$\sum_0^\infty{}^j (-1)^j W_{ja} = \pm \lim_{j=\infty} \mathfrak{W}_{ja},$$

$$\sum_0^\infty{}^j W_{ji} = \lim_{j=\infty} \mathfrak{W}_{ji};$$

aus der ersten dieser Formeln folgt sofort:

$$179) \quad \lim_{j=\infty} \mathfrak{W}_{ja} = 0,$$

aus der zweiten:

$$180a) \quad \text{abs.} \lim_{j=\infty} \mathfrak{W}_{ji} \leqq \alpha,$$ in endlicher Entfernung von den Trennungskurven,

$$180b) \quad \text{abs.} \lim_{j=\infty} \mathfrak{W}_{ji} \leqq \frac{\beta}{\varrho},$$ bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ von den Trennungskurven, wenn man sich denselben auf ω selbst oder einer Fläche nähert, die mit den Teilen von ω nicht gerade den Winkel null einschliesst;

wo α und β endliche Konstanten vorstellen.

Wir setzen nun:

$$181)\begin{cases} \mathfrak{T}_{ji} = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial z}\right)^2\right] d\tau, \\ \quad = -\int\limits_{\omega} \mathfrak{W}_{ji} \frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu} d\omega, \end{cases}$$

es folgt dann, da nach 122):

$$2\frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu} = \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu},$$

somit:

$$182) \quad \lim_{j=\infty} \frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu} = 0,^{*})$$

mit Hilfe von 180a) und 180b) (51):

$$183) \quad \lim_{j=\infty} \mathfrak{T}_{ji} = 0,$$

und hieraus:

$$184) \quad \lim_{j=\infty} \mathfrak{W}_{ji} = \text{const.} = 2C.$$

Die Formeln 179), 184) beweisen den zweiten Teil der Behauptung der Neumannschen Methode, dass an der Fläche ω:

$$185)\begin{cases} \frac{1}{2}\sum_0^\infty {}^j\, W_{ja} = f + C, \\ \frac{1}{2}\sum_0^\infty {}^j\, (-1)^{j+1} W_{ji} = f. \end{cases} \qquad \text{(man vgl. S. 250).}$$

§ 8.

Jede der Funktionen W_{ji}, W_{ja} ist eine allgemeine Potentialfunktion des Innen- resp. Aufsenraumes, die in dem Innen- resp. Aufsenraume der Bedingung der Eindeutigkeit und Stetigkeit genügt; es ist somit nach Zusatz 1 zu II:

---

*) Denn da für $\lim\limits_{j=\infty}$ die Integrale T_{ji}, T_{ja} verschwinden, gilt gleiches für alle Ableitungen $\lim\limits_{j=\infty} \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu}$, $\lim\limits_{j=\infty} \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu}$.

$$\text{abs. } W_{ji} \overline{\overline{<}} \text{ abs. Max. } |W_{ji}|_\omega \text{ *)}, \text{ im ganzen Innenraume,}$$

$$\text{abs. } W_{ja} \overline{\overline{<}} \text{ abs. Max. } |W_{ja}|_\omega, \text{ im ganzen Außenraume,}$$

und ebenso, wenn n irgend eine ganze Zahl vorstellt:

$$186\text{a)} \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } \frac{1}{2} \sum_0^n{}^j (-1)^{j+1} W_{ji} \\ \qquad \overline{\overline{<}} \text{ abs. } \frac{1}{2} \sum_0^n{}^j (-1)^{j+1} |W_{ji}|_\omega, \text{ im ganzen Innenraume,} \\ \text{abs. } \frac{1}{2} \sum_0^n{}^j W_{ja} \overline{\overline{<}} \text{ abs. } \frac{1}{2} \sum_0^n{}^j |W_{ja}|_\omega, \text{ im ganzen Außenraume.} \end{array} \right.$$

Nun ist nach 106) und 107) an der Fläche ω:

$$186\text{b)} \left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \sum_0^n{}^j (-1)^{j+1} W_{ji} \\ \qquad = f - \frac{1}{4} (-1)^n [\mathfrak{W}_{n+1a} + \mathfrak{W}_{n+1i} - \mathfrak{W}_{na} - \mathfrak{W}_{ni}], \\ \frac{1}{2} \sum_0^n{}^j W_{ja} = f + \frac{1}{4} [\mathfrak{W}_{n+1a} + \mathfrak{W}_{n+1i} + \mathfrak{W}_{na} + \mathfrak{W}_{ni}]; \end{array} \right.$$

lassen wir daher in 186a) n unendlich wachsen, so ergiebt sich mit Hilfe der Formeln 179) und 184), durch die wir zu den Gleichungen 185) gelangten:

$$187) \left\{ \begin{array}{l} \text{abs. } \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}^j (-1)^{j+1} W_{ji} \overline{\overline{<}} \text{ abs. Max. f}, \quad \text{im ganzen Innenraume,} \\ \text{abs. } \frac{1}{2} \sum_0^\infty{}^j W_{ja} \overline{\overline{<}} \text{ abs. Max. } (f + C), \quad \text{im ganzen Außenraume;} \end{array} \right.$$

damit ist auch die Endlichkeit der durch die Neumannschen Reihen dargestellten Funktionen im ganzen Innenresp. Außenraume bewiesen.

---

*) Wir verstehen unter $|W_{ji}|_\omega$, $|W_{ja}|_\omega$ hier die Randwerte von W_{ji}, W_{ja} an der Fläche ω.

§ 9.

Es bleibt noch übrig, zu beweisen, dass sämmtliche Ableitungen der durch die Neumannschen Reihen:

$$188)\quad \begin{cases} U_i = \frac{1}{2}\sum_0^\infty {}_j (-1)^{j+1} W_{ji}, \\ U_a = \frac{1}{2}\sum_0^\infty {}_j W_{ja} \end{cases}$$

dargestellten Funktionen innerhalb des Innen- resp. Aufsenraumes eindeutig und stetig, und dass U_i, U_a im ganzen Innen- resp. Aufsenraume in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven eindeutig und stetig sind.

Es folgt in endlicher Entfernung von der Fläche ω zunächst für die durch die Gleichungen 150) definierten Funktionen $\mathfrak{U}_j$:

$$D\mathfrak{U}_j = \int_\omega (W_j - C_j)\,\Psi\, d\omega,$$

wenn wir unter $D\mathfrak{U}_j$ irgend einen Differentialquotienten von $\mathfrak{U}_j$, unter Ψ eine endliche Gröfse verstehen; es ist somit(49):

$$\text{abs. } D\mathfrak{U}_j \overline{\overline{<}} \sqrt{\Phi \cdot \int_\omega (W_j - C_j)^2\, d\omega}, \quad (\Phi \text{ endlich}),$$

$$189)\quad \text{abs. } D\mathfrak{U}_j \overline{\overline{<}} \alpha \cdot L^j, \text{ nach } 148),$$

wo α eine endliche Gröfse, L einen echten Bruch vorstellt.

Analog der Untersuchung S. 269 folgt aus 189) auch:

$$190)\quad \begin{cases} \text{abs. } D W_{ja} \overline{\overline{<}} A \cdot L^j, \\ \text{abs. } D W_{ji} \overline{\overline{<}} B \cdot L^j, \end{cases}$$

wo wieder A, B endliche Gröfsen vorstellen. Damit ist auch die Eindeutigkeit und Stetigkeit sämmtlicher Ableitungen der Funktionen U_i und U_a innerhalb des Innen- resp. Aufsenraumes von ω bewiesen.

Dass U_i, U_a selbst in endlicher Entfernung von der Fläche ω eindeutig und stetig sind, folgt bereits aus dem Vorstehenden; wir haben daher nur noch zu beweisen, dass diese Eigenschaft

der Eindeutigkeit und Stetigkeit auch erhalten bleibt, wenn wir den variabeln Punkt (in endlicher Entfernung von den Trennungskurven) unendlich nahe an die Fläche ω von innen oder aufsen heranrücken lassen. Wir beschränken uns auf die Untersuchung für U_a, die Untersuchung für U_i ist vollkommen analog.

Wir nehmen auf der äufseren Normalen der Fläche in einem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ (in endlicher Entfernung von den Trennungskurven) einen Punkt (xyz) an, der von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ die Entfernung r habe, wir haben zu zeigen, dass die Differenz:

$$U_a(xyz) - U_a(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$$

durch Verkleinerung von r kleiner gemacht werden kann, als eine beliebig klein angenommene Gröfse ε. Wir schreiben $U_a(xyz)$ in der Form:

$$191)\quad U_a(xyz) = \frac{1}{2}\sum_{0}^{m}{}^{j}\, W_{ja}(xyz) + \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{\infty}{}^{j}\, W_{ja}(xyz),$$

wir wählen dabei die Zahl m so grofs, dass:

$$192)\quad \text{abs.}\ \frac{1}{2}\sum_{m+1}^{\infty}{}^{j}\, W_{ja}(xyz) \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{3},$$

was wir infolge der Ungleichungen 178a) stets erreichen können, und auch grofs genug, dass:

$$193)\quad \text{abs.}\ \frac{1}{4}\left(\mathfrak{W}_{m+1a} + \mathfrak{W}_{m+1i} + \mathfrak{W}_{ma} + \mathfrak{W}_{mi} - 4C\right) \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{3},$$

was wir gleichfalls bei endlichem m erreichen können, da in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven infolge 178a) und 112) (resp. 113) auch:

$$194)\quad \left\{\begin{array}{r} \text{abs.}\ \mathfrak{W}_{ja} \overline{\overline{<}} A \cdot A^j, \\ \text{abs.}\ (\mathfrak{W}_{ji} - 2C) \overline{\overline{<}} A \cdot A^j, \end{array}\right| \quad j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots$$

wo A eine endliche Gröfse vorstellt.

Schliefslich können wir, nachdem m so als eine bestimmte endliche Zahl festgesetzt ist, infolge der Stetigkeit von $W_1 W_2 \ldots W_m$ durch genügende Verkleinerung von r:

$$195)\quad \text{abs.}\left[\frac{1}{2}\sum_{0}^{m}{}^{j}\, W_{ja}(xyz) - \frac{1}{2}\sum_{0}^{m}{}^{j}\, W_{ja}(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)\right] \overline{\overline{<}} \frac{\varepsilon}{3}$$

machen. Wir addieren 193) und 195), dann folgt (7) mit Hilfe der zweiten Formel 186b):

$$196)\ \text{abs.}\left[\frac{1}{2}\sum_{0}^{m}{}^{j}\, W_{ja}(xyz) - [f(\xi_0\eta_0\zeta_0) + C]\right] \overline{\overline{<}} \frac{2\varepsilon}{3},$$

und, falls man hierzu noch 192) hinzuaddiert, (7) mit Hilfe von 191):

$$197)\ \text{abs.}\ [U_a(xyz) - U_a(\xi_0\eta_0\zeta_0)] \overline{\overline{<}} \varepsilon.$$

Damit ist auch die Stetigkeit von U_a bei unendlicher Annäherung an die Fläche ω bewiesen, und es ist für diesen Beweis im übrigen gleichgültig, in welcher Weise man (xyz) an $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ heranrücken lässt. Analoges gilt für U_i.

§ 10.

Wir können unsere Resultate in dem folgenden Satze zusammenfassen:

VIII. (Methode des arithmetischen Mittels.) Es sei ω irgend eine geschlossene, gegen einen inneren Punkt konvexe Fläche und f eine Funktion der Stelle auf derselben, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

Es soll f auf ω eindeutig und stetig sein; es sollen die ersten Ableitungen von f eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen endlich*) sein, so lange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven der Fläche (in bezug auf f) hält; bei genügender Annäherung an die Trennungskurven sollen die Relationen:

$$198)\ \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho), \\[2ex] \varrho \dfrac{\partial}{\partial \nu}\displaystyle\int_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \Delta(\varrho)\ (^{45}) \end{cases}$$

erfüllt sein, wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend

*) Der Satz gilt auch dann, wenn nur die ersten Ableitungen von f in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven regulär sind.

eine tangentiale Richtung vorstellt, und $D(\varrho)$, $\varDelta(\varrho)$ Gröfsen, welche durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Man bilde successive die Funktionen:

$$
199) \quad \left\{
\begin{aligned}
\mathfrak{W}_0 &= 0, \\
\mathfrak{W}_1 &= -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \\
\mathfrak{W}_2 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} (\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i}) \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \\
\mathfrak{W}_3 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} (\mathfrak{W}_{2a} + \mathfrak{W}_{2i}) \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}
\right.
$$

dann stellen die Funktionen:

$$
200) \quad \left|
\begin{aligned}
U_a &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{j}\, (\mathfrak{W}_j + \mathfrak{W}_{j-1}), \\
U_i &= \frac{1}{2}\sum_{1}^{\infty}{}_{j}\, (-1)^j (\mathfrak{W}_j - \mathfrak{W}_{j-1})
\end{aligned}
\right.
$$

allgemeine Potentialfunktionen des Aufsen- resp. Innenraumes dar, welche an der Fläche ω die Werte annehmen:

$$
201) \quad \left\{
\begin{aligned}
U_a &= f + C, \\
U_i &= f;
\end{aligned}
\right.
$$

dabei bedeutet C die Konstante, zu welcher die Reihe:

$$
202) \quad C = \frac{1}{2}\left[(\mathfrak{W}_{1i} - \mathfrak{W}_{0i}) + (\mathfrak{W}_{2i} - \mathfrak{W}_{1i}) + \cdots\right]
$$

konvergiert.

§ 11.

Wir können zwei Arten von Trennungskurven unterscheiden: Die Unstetigkeitskurven von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$, welche wir als Trennungskurven erster Art bezeichnen wollen, und

die Unstetigkeitskurven der Ableitungen von f, welche wir als Trennungskurven zweiter Art bezeichnen wollen.

Wenn wir, unter Beachtung des Unterschiedes dieser beiden Arten der Trennungskurven den Beweis von VIII noch einmal durchgehen, sehen wir, dass die Formeln 178a) und 194) gelten, wenn man sich nur in endlicher Entfernung von den Trennungskurven erster Art hält, dass somit U_a und U_i im ganzen Aufsen- resp. Innenraume eindeutig und stetig sind, solange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven erster Art hält; daraus ergiebt sich folgender

Zusatz 1 zu VIII. Ist im besonderen ω eine stetig gekrümmte Fläche, die im übrigen den Bedingungen des Satzes VIII genügt, so sind U_i und U_a allgemeine Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes, welche in dem Innen- resp. Aufsenraume überall eindeutig und stetig sind; sie stellen somit auch die einzigen stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes dar, welche an der Fläche ω die Randwerte f, resp. $f + C$ annehmen.

Nehmen wir überhaupt keine Trennungskurven an, so folgt der noch speciellere

Zusatz 2 zu VIII. Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene, gegen einen inneren Punkt konvexe Fläche und f eine Funktion der Stelle auf ω, die mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig, und deren zweite Ableitungen endlich*) sind, so führt uns die Neumannsche Methode zu den allgemeinen Potentialfunktionen U_i und U_a des Innen- resp. Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die Werte f, $f + C$ annehmen; dieselben werden überdies im ganzen Innen- resp. Aufsenraume eindeutig und stetig und somit die einzigen stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes sein, welche an der Fläche ω die genannten Randwerte annehmen.

Es wird für die Folge von Nutzen sein, die Bedingungen des Satzes VIII und seines ersten Zusatzes, namentlich die zweite Be-

*) Der Satz gilt auch dann, wenn nur die ersten Ableitungen von f an der Fläche ω überall regulär sind.

dingung 198) durch andere Bedingungen zu ersetzen, welche wir als Bedingungen α), β), β') bezeichnen wollen.

Bedingungen α). Es soll f auf ω eindeutig und stetig sein; die ersten Ableitungen von f in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven regulär, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho)$$

erfüllt sind; es sollen aufserdem die Integrale:

$$T_{0i} = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{1i}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{1i}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{1i}}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

$$T_{0a} = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{1a}}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{1a}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{1a}}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

bestimmte, endliche Werte haben.

Alle unsere Betrachtungen bleiben nämlich (vgl. Anm. (45)) gültig, wenn die zweite Bedingung 198) fortbleibt und wir nur nachträglich von den Integralen T_{0i}, T_{1i}, $T_{2i} \ldots$; T_{0a}, T_{1a}, $T_{2a} \ldots$ nachweisen können, dass sie bestimmte, endliche Werte haben; dies folgt bei den Bedingungen α) nach Formel 146) S. 259.

Bedingungen β). Man kennt — bei den Voraussetzungen des Satzes VIII mit Ausnahme der zweiten Bedingung 198) — für jeden Teil ω_j der Fläche ω irgend eine Fläche ω_j', die mit ω_j von null verschiedene Winkel einschliefst und mit ω_j zusammen eine geschlossene Fläche bildet, und man kennt eine Funktion f_j' der Stelle auf ω_j' von solcher Beschaffenheit, dass f_j' auf ω_j' eindeutig und stetig ist und dieselben Randwerte hat, wie f_j, dass die ersten Ableitungen von f_j' in endlichen Entfernungen von der Randkurve und einer endlichen Anzahl von Trennungskurven eindeutig und stetig sind und bei genügender Annäherung an diese Kurven die Relationen:

$$\varrho' \frac{\partial f_j'}{\partial h'} = \Delta(\varrho')$$

erfüllen, wo ϱ' die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den genannten Kurven, h' irgend eine tangentiale Richtung von ω_j' vorstellt, und dass schliefslich:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\int_{\omega_j} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \int_{\omega_j'} f_j' \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega\right)$$

an der Fläche ω_j in endlicher Entfernung von der Randkurve und den Trennungskurven eindeutig und stetig und bei genügender Annäherung an dieselben von der Form:

$$\frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho}$$

ist.*)

In diesem Falle folgt leicht mit Hilfe des Zusatzes 3 zu VIIIa) in Anm. (23), dass auch die zweite Bedingung 198) erfüllt sein muss.

Bedingungen β'). Die Funktion f soll auf ω eindeutig und stetig sein, und die stetig gekrümmten Teile von ω sollen sich in eine endliche Zahl von Gebieten zerlegen lassen, auf denen die ersten Ableitungen von f eindeutig und stetig, die zweiten endlich sind.

Dass auch in diesem Falle alle Voraussetzungen des Satzes VIII und seines ersten Zusatzes, im besonderen die zweite Bedingung 198), erfüllt sind, folgt aus der Formel [59) S. 46]:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0}\int_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \int_{\omega} \frac{\partial f}{\partial \nu_0} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$
$$- \int_{\omega} \cos(\nu\nu_0)\left\{\frac{\partial f}{\partial \xi}\frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta}\frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial \zeta}\frac{\cos(rz)}{r^2}\right\} d\omega,$$

die für jeden (an der äufseren oder inneren Seite von ω gelegenen) Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ der Fläche mit der inneren Normale ν_0 gilt, mit Hilfe des Zusatzes 3 zu VIIIb) des I. Teiles in Anm. (24).

---

*) Also im besonderen, falls:

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left(\int_{\omega_j} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \int_{\omega_j'} f_j' \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega\right)$$

an der Fläche ω_j überall eindeutig und stetig ist.

3. Kapitel.

Über die Green-Neumannsche Funktion und die Beseitigung der Konstanten C.

§ 1.

Um uns bei der Lösung des äufseren Problemes von der Konstanten C zu befreien, können wir folgendermafsen verfahren:

Wir können mit Hilfe der Neumannschen Methode — wir beschränken uns auf den Fall stetig gekrümmter, gegen einen inneren Punkt konvexer Flächen, auf den sich Zusatz 1 zu VIII bezieht — die allgemeine Potentialfunktion u_a des Aufsenraumes konstruieren, welche an der Fläche die Randwerte:

$$203)\quad u_a = \frac{1}{\mathfrak{R}} + \mathfrak{C}$$

besitzt, wo $\mathfrak{C}$ eine ganz bestimmte, durch die Neumannsche Methode gegebene Konstante vorstellt.*)

Es ist leicht zu ersehen, dass

$$204)\quad \mathfrak{C} \neq 0$$

sein muss; wäre nämlich

$$\mathfrak{C} = 0,$$

so folgte aus 203), dass im ganzen Aufsenraume:

$$u_a = \frac{1}{r_1}$$

sein müsste, wenn r_1 die Entfernung des variabeln Punktes (xyz) von O vorstellt; nun muss:

$$\int\limits_{\omega} \frac{\partial u_a}{\partial \nu}\, d\omega = 0$$

---

*) Dass die Methode anwendbar ist, folgt aus Zusatz 2 zu VIII, da $\frac{1}{\mathfrak{R}}$ auf ω mit seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

sein, und diese Gleichung kann von der Funktion:

$$u_a = \frac{1}{r_1}$$

nicht erfüllt werden.

Wir multiplizieren nun die Gleichung 203) mit $\frac{C}{\mathfrak{C}}$ und subtrahieren sie von der Gleichung:

$$U_a = f + C,$$

dann folgt:

$$205)\quad U_a - \frac{C}{\mathfrak{C}} u_a = f - \frac{C}{\mathfrak{C}} \cdot \frac{1}{\mathfrak{R}}, \text{ an der Fläche } \omega,$$

und hieraus:

$$206)\quad \overline{U}_a = f, \text{ an der Fläche } \omega,$$

wenn wir unter $\overline{U}_a$ die allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes:

$$207)\quad \overline{U}_a = U_a - \frac{C}{\mathfrak{C}}\left(u_a - \frac{1}{r_1}\right)$$

verstehen.

§ 2.

Die durch die Gleichung 203) definierte Funktion u_a will ich als die Green-Neumannsche Funktion des Aufsenraumes von ω in bezug auf den Punkt O bezeichnen und $\mathfrak{C}$ als die dieser Funktion zugehörige Konstante.

Wir können nach dieser Definition unser Resultat so formulieren.

Zusatz 3 zu VIII. Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene, gegen einen inneren Punkt O konvexe Fläche, u_a die Green-Neumannsche Funktion des Aufsenraumes von ω in bezug auf O, $\mathfrak{C}$ die derselben zugehörige Konstante und U_a die durch die Neumannsche Methode konstruierte allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die Randwerte:

$$U_a = f + C$$

hat, die im übrigen den Voraussetzungen des Satzes VIII genügen, so ist:

$$\overline{U}_a = U_a - \frac{C}{\mathfrak{C}}\left(u_a - \frac{1}{r_1}\right)$$

die allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die Randwerte:

$$\overline{U}_a = f$$

hat; dabei bezeichnet r_1 die Entfernung des variabeln Punktes (xyz) von O.

V. Abschnitt.

Allgemeine Lösung des Hauptproblemes.

1. Kapitel.

Über allgemeine Potentialfunktionen mit abteilungsweise stetigen Randwerten.

§ 1.

Wir sind durch die Untersuchungen des IV. Abschnittes in den Stand gesetzt, allgemeine Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes einer stetig gekrümmten, gegen einen inneren Punkt O konvexen Fläche ω zu konstruieren, welche im ganzen Innen- resp. Aufsenraum eindeutig und stetig sind und an der Fläche ω Randwerte f annehmen, die folgende Bedingungen erfüllen:

Es soll f auf ω eindeutig und stetig sein;

es sollen die ersten Ableitungen von f eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen endlich*) sein, solange man sich in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven der Fläche (in bezug auf f) hält;

bei genügender Annäherung an die Trennungskurven sollen die Relationen

---

*) Diese Bedingung ist auch durch die folgende zu ersetzen: Es sollen die ersten Ableitungen von f in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven regulär sein.

$$208)\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho), \\ \varrho \dfrac{\partial}{\partial \nu} \displaystyle\int_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \Delta(\varrho) \end{cases}$$

erfüllt sein, wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $D(\varrho)$, $\Delta(\varrho)$ Gröfsen, welche durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Zur Lösung unseres Hauptproblemes für den Fall, dass die Fläche ω nicht mehr gegen einen inneren Punkt O konvex ist, müssen wir die Neumannsche Methode zunächst, unter Beibehaltung dieser Bedingung für die Fläche ω, auf den Fall ausdehnen, dass f auf ω nur abteilungsweise eindeutig und stetig ist; zu diesem Zwecke müssen wir auch die zweite Bedingung 208) und einige frühere Sätze dieses IV. Teiles etwas allgemeiner fassen, und zu diesen Verallgemeinerungen wollen wir jetzt übergehen.

§ 2.

Die erste Verallgemeinerung bezieht sich auf den Zusatz zu Ia) bis Id).

Wir wollen eine allgemeine Potentialfunktion U_i resp. U_a des Innen- resp. Aufsenraumes irgend einer geschlossenen Fläche ω regulär nennen, wenn ihre Randwerte f auf ω abteilungsweise([52]) eindeutig und stetig und bei genügender Annäherung des variabeln Punktes (xyz) an einen Punkt P der Trennungskurven von ω (in bezug auf f) auf ω oder irgend einer Fläche ω', die mit ω von null verschiedene Winkel θ einschliesst, die Relationen erfüllt sind:

$$209)\quad \begin{cases} \varrho' \dfrac{\partial U}{\partial h'} = \Delta(\varrho'),^{*)} \\ \varrho' \dfrac{\partial U}{\partial \nu'} = \Psi_P + D(\varrho'), \end{cases}$$

---

*) Und zwar bei genügend kleinem θ:

$$\varrho' \frac{\partial U}{\partial h'} = \frac{\mathfrak{D}(\varrho')}{\sin^{\lambda}\theta}, \quad (\lambda < 1).$$

wenn ϱ' die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h' irgend eine tangentiale Richtung, ν' die Normale von ω' in (xyz), ψ_P eine stetige Funktion der Stelle P auf den Trennungskurven vorstellt und $\varDelta(\varrho')$, $D(\varrho')$ Gröfsen, die durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können.

Nach dieser Definition können wir den Zusatz zu Ia) bis Id) in folgender Weise verallgemeinern:

Verallgemeinerung des Zusatzes zu Ia) bis Id). Sind U_i resp. U_a reguläre, allgemeine Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes einer geschlossenen Fläche ω, so bestehen stets die Gleichungen:

$$210)\quad \left.\begin{aligned} U_i &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U_i}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U_i \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ 0 &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U_a}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U_a \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{aligned}\right\}\text{ im Innenraume,}$$

$$211)\quad \left.\begin{aligned} U_a &= +\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U_a}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U_a \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ 0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega}\frac{\partial U_i}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U_i \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \end{aligned}\right\}\text{ im Aufsenraume,}$$

falls ν die innere Normale von ω vorstellt.

Denken wir uns nämlich, wie früher (S. 218) die aus der Parallelfläche (r) und den Ringflächen (ϱ) bestehende Fläche ω', so folgt bei unserer Definition der regulären, allgemeinen Potentialfunktionen, dass die über die Ringflächen (ϱ) zu erstreckenden Integrale rechts in den Formeln 4a) bis 4d) durch Verkleinerung von r und ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können, dass somit die Grenzwerte der Integrale über die Parallelfläche (r), also die Integrale über die Fläche ω, die durch die Formeln 210), 211) gegebenen Werte erhalten müssen.

§ 3.

Verallgemeinerung des Zusatzes 1 zu II. Ist G der gröfste, K der kleinste Randwert einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion U_i resp. U_a des Innen- resp. Aufsenraumes einer geschlossenen Fläche ω, so ist im ganzen Innen- resp. Aufsenraum:

$$212a)\quad K \lesseqgtr U \lesseqgtr G;$$

ist $K < G$ in strengem Sinne, so ist in endlicher Entfernung von ω:

$$212b)\quad K < U < G, \text{ (in strengem Sinne).}$$

Verallgemeinerung des Zusatzes 2 zu II. Sind U_1 und U_2 zwei reguläre, allgemeine Potentialfunktionen des Innen- oder Aufsenraumes einer geschlossenen Fläche ω, und ist an der Fläche ω:

$$213)\quad U_1 = U_2,$$

so besteht diese Gleichung im ganzen Innen- resp. Aufsenraum.

Wir können nämlich, infolge der zweiten Relation 209), wenn wir in einem Punkte P der Trennungskurven die Normalebene

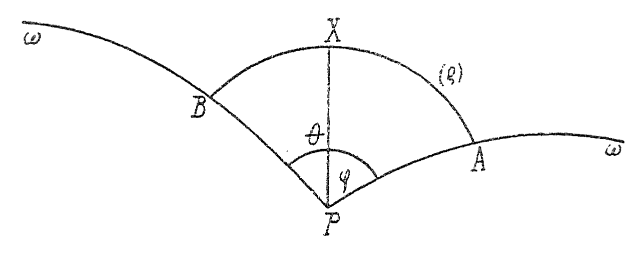


Fig. 63.

konstruieren, und in derselben um P als Centrum einen Kreis mit dem genügend kleinen Radius ϱ schlagen, der die Fläche ω in den Punkten A und B schneiden möge, von dem Werte einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion U des Innen- resp.

Aufsenraumes von ω in einem Punkte X jenes Kreises aussagen, dass er der Gleichung genügt:

$$214)\quad U_X = U_A + \varphi \cdot \Psi_P + \Delta(\varrho),$$

wenn φ den Winkel vorstellt, den PX mit PA bildet, und $\Delta(\varrho)$ eine Gröfse, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Bilden wir die Gleichung 214) für den Fall, dass X nach B rückt, so folgt:

$$215)\quad U_B = U_A + \vartheta \cdot \Psi_P + \Delta(\varrho),$$

wo ϑ den Winkel vorstellt, den die Teile von ω in P bilden, so dass wir in 209) und 214) geradezu:

$$\Psi_P = \frac{U_B - U_A}{\vartheta} + \mathfrak{D}(\varrho)$$

setzen können, und die Gleichung 214) geht in die folgende über:

$$216)\quad U_X = U_A + \frac{\varphi}{\vartheta}(U_B - U_A) + D(\varrho).$$

Denken wir uns nun die Fläche ω' konstruiert und machen r beliebig klein, so ist immer noch U eine allgemeine Potentialfunktion des Raumes τ', die in diesem Raume überall eindeutig und stetig ist; die Randwerte von U an der Grenze des Raumes τ' liegen zwischen extremen Werten, die sich von den extremen Werten G und K von U auf ω nur um Gröfsen von der Form $\Delta(\varrho)$ unterscheiden, da nach 216) dies auch für die Werte von U auf den Ringflächen (ϱ) folgt; es ergiebt sich somit nach Zusatz 1 zu II und durch den Übergang zur Grenze, dass U in dem ganzen Gebiete τ zwischen den extremen Werten G und K liegen muss und in endlicher Entfernung von ω diese Werte nicht erreichen kann, falls $K < G$ im strengen Sinne ist.

Obwohl dieser Beweis der Verallgemeinerung von Zusatz 1 zu II dem Wortlaut nach nur für stetig gekrümmte Trennungskurven gilt, bedarf wohl die Ausdehnung auf den allgemeinen Fall keiner besonderen Erläuterung.

Die Verallgemeinerung des Zusatzes 2 zu II folgt nunmehr genau, wie Zusatz 2 zu II aus Zusatz 1 zu II.

Bemerkung. Beide Verallgemeinerungen sind ohne weiteres auf den Fall auszudehnen, dass sich U, resp. U_1 und U_2 je aus einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion und einer allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzen, die in ihrem ganzen Raumgebiet eindeutig und stetig ist.

§ 4.

Erweiterung des Satzes IIIa). Das Flächenintegral über eine geschlossene Fläche ω:

$$217)\quad V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

ist eine reguläre, allgemeine Potentialfunktion des Innen- und Aufsenraumes von ω, falls H auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig ist, falls seine ersten Ableitungen in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven der Fläche (in bezug auf H) eindeutig und stetig sind und bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen

$$218)\quad \varrho \frac{\partial H}{\partial h} = \varDelta(\varrho)$$

erfüllen.

Dies folgt unmittelbar aus VIIIb) und seinen Zusätzen im I. Teile [unter Rücksichtnahme auf Zusatz 3 zu VIIIb) in Anm. (24)].

Erweiterung des Satzes IIIb). Das Flächenintegral über eine geschlossene Fläche ω:

$$219)\quad W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

ist eine reguläre, allgemeine Potentialfunktion des Innen- und Aufsenraumes von ω, falls $\varkappa$ auf ω abteilungsweise (52) eindeutig und stetig ist, falls die ersten Ableitungen von $\varkappa$ in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven der Fläche ω (in bezug auf $\varkappa$) ein-

deutig und stetig sind und bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen erfüllen:

$$220)\quad \varrho \frac{\partial \varkappa}{\partial \mathrm{h}} = \varDelta(\varrho),$$

wo ϱ die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den Trennungskurven, h irgend eine tangentiale Richtung vorstellt und $\varDelta(\varrho)$ eine Gröfse, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, und falls schliefslich bei genügender Annäherung an einen Punkt P der Trennungskurven:

$$221)\quad \varrho \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \nu} = \Psi_{\mathrm{P}} + \mathrm{D}(\varrho),$$

wo Ψ_{P} eine stetige Funktion der Stelle P auf den Trennungskurven vorstellt und $\mathrm{D}(\varrho)$ wieder eine Gröfse, die durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann.

Dies folgt unmittelbar aus VIIIa) mit seinen Zusätzen im I. Teile. Es wird für die Folge von Nutzen sein, Bedingungen anzugeben, welche die Relationen 221) zur Folge haben, falls die übrigen Bedingungen der Verallgemeinerung von IIIb) erfüllt sind:

Bedingungen γ). Man kennt für jeden Teil ω_{j} der Fläche ω irgend eine Fläche ω_{j}', die mit ω_{j} von null verschiedene Winkel einschliefst und mit ω_{j} zusammen eine geschlossene Fläche bildet, und man kennt eine Funktion $\varkappa_{\mathrm{j}}'$ der Stelle auf ω_{j}' von solcher Beschaffenheit, dass $\varkappa_{\mathrm{j}}'$ auf ω_{j}' abteilungsweise (52) eindeutig und stetig ist; dass die ersten Ableitungen von $\varkappa_{\mathrm{j}}'$ in endlicher Entfernung von der Randkurve und einer endlichen Anzahl von Trennungskurven der Fläche ω_{j}' eindeutig und stetig sind und bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen erfüllen:

$$222)\quad \varrho' \frac{\partial \varkappa_{\mathrm{j}}'}{\partial \mathrm{h}'} = \varDelta(\varrho'),$$

wo ϱ' die kürzeste Entfernung des betreffenden Punktes von den genannten Kurven, h' irgend eine tangentiale Richtung von ω_{j}' vorstellt, und $\varDelta(\varrho')$ eine Gröfse, die

durch Verkleinerung von ϱ' unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann; dass schliefslich

$$\frac{\partial}{\partial \nu}\left[\int\limits_{\omega_j} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega + \int\limits_{\omega_j'} \varkappa_j' \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega\right]$$

überall an der Fläche ω_j in endlicher Entfernung von der Randkurve und den Trennungskurven eindeutig und stetig und bei genügender Annäherung an dieselben von der Form

$$\frac{\Psi_P + D(\varrho)}{\varrho}$$

ist.*)

Es folgt wieder leicht mit Hilfe des Zusatzes 3 zu VIIIa) in Anm. ([23]), dass die Bedingungen γ) 221) zur Folge haben.

Bedingungen γ'). Die Funktion $\varkappa$ soll auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig, und auf den Teilen, in welche ω durch ihre Trennungskurven (in bezug auf $\varkappa$) zerlegt wird, sollen die ersten Ableitungen von $\varkappa$ eindeutig und stetig, die zweiten Ableitungen von $\varkappa$ endlich sein.

§ 5.

Erweiterung des Satzes V. Ist f eine abteilungsweise([52]) eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf einer Kugelfläche (R), deren Ableitungen in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven eindeutig und stetig sind, während bei genügender Annäherung an die Trennungskurven die Relationen:

$$223) \quad \varrho \frac{\partial f}{\partial h} = \Delta(\varrho)$$

---

*) Also im besonderen, falls

$$\frac{\partial}{\partial \nu'}\left(\int\limits_{\omega_j} \varkappa \frac{\cos(r\nu')}{r^2}\, d\omega + \int\limits_{\omega_j'} \varkappa_j' \frac{\cos(r\nu')}{r^2}\, d\omega\right)$$

an der Fläche ω_j überall eindeutig und stetig ist.

erfüllt sind, genügt aufserdem f den Bedingungen γ) oder γ'), so ist:

$$224)\quad U_i = -\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

die reguläre, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes, welche an der Kugelfläche die Randwerte f hat, und:

$$225)\quad U_a = +\frac{1}{4\pi R}\int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

die reguläre, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes, der die Randwerte f an der Kugelfläche zugehören.

Der Beweis ist wortgetreu derselbe, wie in Abschnitt III, Kap. 1, § 1, nur dass noch hinzuzufügen ist, dass U_i und U_a infolge der von f erfüllten Bedingungen γ) resp. γ') auch reguläre, allgemeine Potentialfunktionen sind, somit auch die einzigen regulären, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes, welche an der Kugelfläche die Randwerte f haben.

§ 6.

Trotz dieser Erweiterungen früherer Sätze, auf die sich der Beweis der Neumannschen Methode stützt, scheint dieselbe doch auf den ersten Anblick nicht anwendbar, weil wir nicht wissen, ob die Integrale:

$$T_i = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

$$T_a = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right] d\tau,$$

in denen:

$$W = \int\limits_{(\omega)} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

überhaupt endlich sind, falls $\varkappa$ eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf ω ist, und da sich unser Beweis der Neumannschen Methode wesentlich auf die Endlichkeit solcher Integrale stützte; nichtsdestoweniger werden wir imstande sein, den Satz VIII in folgender Weise auszudehnen:

Erweiterung des Satzes VIII. Ist ω eine geschlossene, stetig gekrümmte, gegen einen inneren Punkt O konvexe Fläche, so gilt die Neumannsche Methode auch dann noch, falls f eine abteilungsweise(52) stetige Funktion der Stelle auf ω ist, falls die ersten Ableitungen von f in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven der Fläche ω (in bezug auf f) regulär sind und bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen erfüllen:

$$226) \quad \varrho \frac{\partial f}{\partial h} = \varDelta(\varrho),$$

falls schliefslich f den Bedingungen γ) oder γ') genügt, und zwar liefert uns die Neumannsche Methode die regulären, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die Randwerte f resp. f + C haben.

Um dies zu beweisen, werden wir zunächst zeigen, dass wir, falls wir, wie früher:

$$227) \quad \mathfrak{W}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

setzen, durch die Neumannsche Methode allgemeine Potentialfunktionen U_i' U_a' des Innen- und Aufsenraumes konstruieren können, welche an der Fläche ω die Randwerte:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i})$$

$$\text{resp. } \frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i}) - C$$

haben, und welche im ganzen Innen- resp. Aufsenraume eindeutig und stetig sind.

Die Funktion:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1\,a} + \mathfrak{W}_{1\,i})$$

ist auf ω eindeutig und stetig, falls f den Voraussetzungen unseres Satzes genügt, was daraus hervorgeht, dass identisch:

$$228)\quad \left\{ \begin{aligned} \frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1\,a} + \mathfrak{W}_{1\,i}) &\equiv \quad f - \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{i}, \\ \frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1\,a} + \mathfrak{W}_{1\,i}) &\equiv - f - \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{a} \end{aligned} \right.$$

und bei dem Durchgange durch die Trennungskurven bei unseren Voraussetzungen die Sprünge von

$$f \text{ und } - \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{i},$$

resp. von

$$- f \text{ und } - \frac{1}{2\pi}\left| \int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right|_{a}$$

gerade entgegengesetzt sind.

Können wir noch nachweisen, dass die Integrale

$$229)\quad \left\{ \begin{aligned} \mathfrak{T}_{2\,a} &= \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{2\,a}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{2\,a}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{2\,a}}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau, \\ \mathfrak{T}_{2\,i} &= \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{2\,i}}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{2\,i}}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_{2\,i}}{\partial z}\right)^2 \right] d\tau, \end{aligned} \right.$$

endlich sind, wenn:

$$230)\quad \mathfrak{W}_2 = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} (\mathfrak{W}_{1\,a} + \mathfrak{W}_{1\,i}) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

so sind die Bedingungen α) (S. 278) für die Funktion:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a}+\mathfrak{W}_{1i})$$

erfüllt, und die Neumannsche Methode liefert uns dann thatsächlich nach Zusatz 1 zu VIII die allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die Randwerte

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a}+\mathfrak{W}_{1i})$$

$$\text{resp. } \frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a}+\mathfrak{W}_{1i})-C$$

haben und im ganzen Innen- resp. Aufsenraume eindeutig und stetig sind.

Dass nun $\mathfrak{T}_{2a}$ und $\mathfrak{T}_{2i}$ bei unseren Voraussetzungen wirklich endlich sind, folgt leicht, wenn man die Formeln:

$$\mathfrak{T}_{2a}=+\int\limits_{\omega}\mathfrak{W}_{2a}\frac{\partial\mathfrak{W}_{2a}}{\partial\nu}d\omega,$$

$$\mathfrak{T}_{2i}=-\int\limits_{\omega}\mathfrak{W}_{2i}\frac{\partial\mathfrak{W}_{2i}}{\partial\nu}d\omega$$

addiert:

$$\begin{aligned}\mathfrak{T}_{2i}+\mathfrak{T}_{2a}=&\int\limits_{\omega}(\mathfrak{W}_{2a}-\mathfrak{W}_{2i})\frac{\partial\mathfrak{W}_{2}}{\partial\nu}d\omega,\\ =&-\int\limits_{\omega}(\mathfrak{W}_{1a}+\mathfrak{W}_{1i})\frac{\partial\mathfrak{W}_{2}}{\partial\nu}d\omega,\\ =&-\int\limits_{\omega}\frac{\partial\mathfrak{W}_{1}}{\partial\nu}(\mathfrak{W}_{2a}+\mathfrak{W}_{2i})\,d\omega,\end{aligned}$$

wie sich auch leicht durch eine der Untersuchung S. 254 analoge Betrachtung ergiebt. Nun ist bei genügender Annäherung an einen Punkt P der Trennungskurven:

$$231)\quad \frac{\partial\mathfrak{W}_{1}}{\partial\nu}=\pm\frac{\psi_{P}}{\varrho}+\frac{\varDelta(\varrho)}{\varrho},\quad 0<\varrho\leqq P,$$

wo Ψ_P eine endliche Gröfse und P eine endliche Länge vorstellt. Denken wir uns daher von der Fläche ω einen endlichen Streifen ω_1 abgeschieden, von solcher Beschaffenheit, dass jeder Punkt der Fläche $\omega - \omega_1$ von den Trennungskurven σ einen gröfseren Abstand hat als P, und bedenken wir, dass für irgend einen Punkt $(\xi\eta\zeta)$ von ω_1:

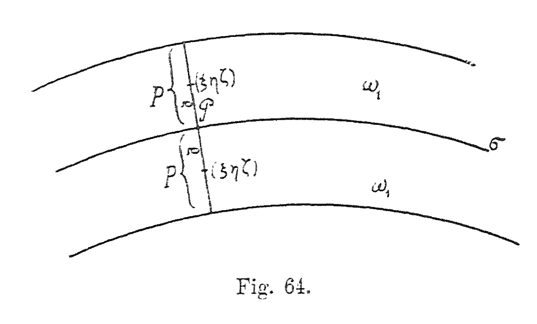


Fig. 64.

$$\mathfrak{W}_{2a} + \mathfrak{W}_{2i} = (\mathfrak{W}_{2a} + \mathfrak{W}_{2i})_P + D(\varrho),$$

so wird:

$$232)\quad \mathfrak{T}_{2i} + \mathfrak{T}_{2a} = \int\limits_{\sigma} \int\limits_{0}^{P} \pm \frac{\Psi_P (\mathfrak{W}_{2a} + \mathfrak{W}_{2i})_P}{\varrho}\, d\varrho\, d\sigma + c,$$

wo c eine endliche Konstante vorstellt. Das erste Glied rechts ist null, weil für je zwei Punkte $(\xi\eta\zeta)$ mit dem kürzesten Abstande ϱ von σ, welche auf entgegengesetzten Seiten von σ liegen, Ψ_P mit entgegengesetzten Vorzeichen zu nehmen ist; damit ist die Endlichkeit von $\mathfrak{T}_{2i} + \mathfrak{T}_{2a}$, also auch von $\mathfrak{T}_{2i}$ und $\mathfrak{T}_{2a}$ einzeln bewiesen.

Es stellen nunmehr nach 228)

$$233)\quad \begin{cases} U_i = \quad U_i' + \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \\[2ex] U_a = - U_a' - \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \end{cases}$$

allgemeine Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes dar, welche an der Fläche ω die Randwerte f, resp. f + C haben, wenn U_i' U_a' die durch die Neumannsche Methode gegebenen allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes sind, welche an der Fläche ω die Randwerte:

$$\frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i}),$$

$$\text{resp.}\ \frac{1}{2}(\mathfrak{W}_{1a} + \mathfrak{W}_{1i}) - C$$

haben und im ganzen Innen- resp. Aufsenraume eindeutig und stetig sind. Die Funktionen U_i' resp. U_a' sind nun nicht blofs stetige, sondern auch reguläre allgemeine Potentialfunktionen, wie leicht ([53]) mit Hilfe von Satz 3b) in Anm. ([24]) folgt, gleiches gilt somit auch von U_i resp. U_a.

§ 7.

Die Erweiterung des Satzes VIII gestattet uns, eine allgemeine Potentialfunktion des Innen- resp. Aufsenraumes zu finden, welche auf einem Teile ω_1 der stetig gekrümmten, gegen einen inneren Punkt O konvexen Fläche ω den Wert null, auf dem anderen Teile ω_2 den Wert 1 hat. Die Funktion:

$$234)\quad f = \begin{cases} 0 \text{ auf } \omega_1, \\ 1 \text{ auf } \omega_2 \end{cases}$$

erfüllt offenbar die Voraussetzungen dieses Satzes, und die gesuchten Funktionen $\mathfrak{u}_i\, \mathfrak{u}_a$ sind von der Form:

$$235)\quad \begin{cases} \mathfrak{u}_i = \quad \mathfrak{u}_i' + \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \\ \mathfrak{u}_a = -\,\mathfrak{u}_a' - \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\omega_2} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \end{cases}$$

wo $\mathfrak{u}_i'\, \mathfrak{u}_a'$ allgemeine Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes vorstellen, welche in dem ganzen Innen- resp. Aufsenraum eindeutig und stetig sind.

Es sei σ die Randkurve von ω_2 und ω' eine Fläche, welche ω in der Kurve σ unter von null und π verschiedenen Winkeln θ schneide und aufser der Kurve σ keinen Punkt mit ω gemein habe, wir können zeigen, dass $\mathfrak{u}_i$ resp. $\mathfrak{u}_a$ auf ω' in strenger Weise die Ungleichungen erfüllen:

$$236)\quad \left\{ \begin{array}{l} 0 < \mathfrak{u}_i < 1, \\ 0 < \mathfrak{u}_a < 1, \end{array} \right\} \text{ auf } \omega'.$$

Die Behauptung ist nach der Verallgemeinerung des Zusatzes 1 zu II (und der Bemerkung S. 287) klar, solange man sich in endlicher Entfernung von der Fläche ω hält; nähert man nun den variabeln Punkt X auf der Fläche ω' einem Punkte P der

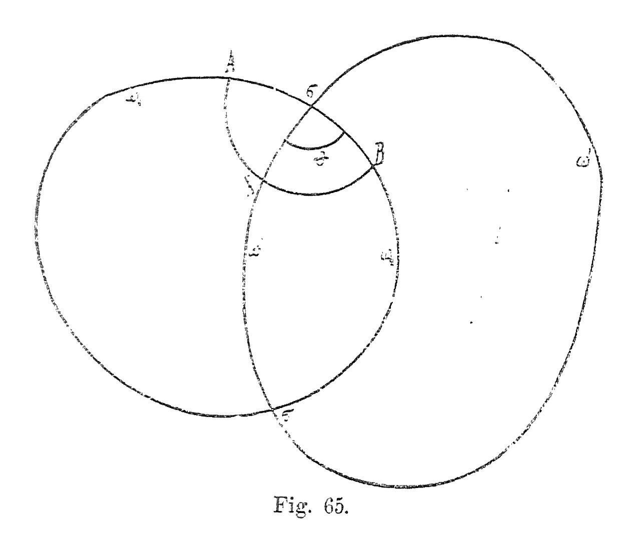


Fig. 65.

Randkurve σ von ω_2 genügend, so ist, wenn man um P als Centrum in der Normalebene der Kurve σ einen Kreis mit dem Radius ϱ (= PX) schlägt, der ω_1 in A, ω_2 in B schneide:

$$237)\quad \left\{ \begin{array}{l} |\mathfrak{u}_i|_X - |\mathfrak{u}_i|_A = \varepsilon_1 + \dfrac{1}{\pi}(\pi - \vartheta) + \Delta_1(\varrho), \\[2ex] |\mathfrak{u}_i|_X - |\mathfrak{u}_i|_B = \varepsilon_2 - \dfrac{1}{\pi}\vartheta + \Delta_2(\varrho), \end{array} \right.$$

wo $\varepsilon_1\ \varepsilon_2$ und $\Delta_1(\varrho)\ \Delta_2(\varrho)$ durch Verkleinerung von ϱ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können; es folgt dies aus der Stetigkeit von $\mathfrak{u}_i'$ und aus dem Satze VIIa) des I. Teiles. Ist somit ϑ von null und π verschieden, so folgt die Behauptung für $\mathfrak{u}_i'$, auch wenn man X an σ unendlich nahe heranrücken lässt; analoges folgt für $\mathfrak{u}_a'$.

Es existiert somit ein echter Bruch λ von solcher Beschaffenheit, dass

$$238)\quad \left.\begin{cases} \mathfrak{u}_i \overline{\overline{<}} \lambda, \\ \mathfrak{u}_a \overline{\overline{<}} \lambda \end{cases}\right\} \text{ auf } \omega'.$$

Es sei nun U_i eine allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω, welche sich aus einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion additiv zusammensetzen kann, und die an der Fläche ω_1 überall den Wert null habe, während ihr absoluter Wert an der Fläche ω_2 der Ungleichung entspreche:

$$239)\ \text{abs. } U_i \overline{\overline{<}} \Gamma, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

wo Γ irgend eine endliche Konstante vorstellt.

Die Funktion:

$$U_i \mp \Gamma \mathfrak{u}_i$$

ist wiederum eine allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes, die sich aus einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion additiv zusammensetzt; dieselbe hat an der Fläche ω_1 die Werte null und entspricht an der Fläche ω_2 der Ungleichung:

$$\text{resp.}\ \left.\begin{matrix} U_i - \Gamma \mathfrak{u}_i \overline{\overline{<}} 0, \\ U_i + \Gamma \mathfrak{u}_i \overline{\overline{>}} 0, \end{matrix}\right\} \text{ an der Fläche } \omega_2.$$

Es ist somit nach der Verallgemeinerung des Zusatzes 1 zu II (und der Bemerkung S. 287) im ganzen Innenraume von ω:

$$U_i \overline{\overline{<}} \Gamma \mathfrak{u}_i,$$
$$U_i \overline{\overline{>}} -\Gamma \mathfrak{u}_i,$$

oder:

$$240)\ \text{abs. } U_i \overline{\overline{<}} \Gamma \mathfrak{u}_i, \text{ im Innenraume von } \omega.$$

Im besonderen gilt auf der Fläche ω' die erste Ungleichung 238), es folgt somit:

$$241)\ \text{abs. } U_i \overline{\overline{<}} \Gamma \cdot \lambda, \text{ auf der Fläche } \omega'.$$

Die analoge Betrachtung lässt sich für den Aufsenraum ausführen, und wir gelangen so zu den beiden folgenden Sätzen:

IXa) Ist U_i die allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten, gegen einen inneren Punkt O konvexen Fläche, die sich aus einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion additiv zusammensetzt, und welche an einem Teil ω_1 der Fläche ω die Randwerte null hat, während sie an dem anderen Teile ω_2 der Fläche ω der Ungleichung genügt:

$$\text{abs. } U_i \lesseqqgtr \Gamma,$$

wo Γ eine endliche Konstante vorstellt, so ist auf irgend einer Fläche ω', welche ω in der Grenzkurve von ω_1 und ω_2 unter von null (π) verschiedenen Winkeln schneidet und sonst keine Punkte mit ω gemein hat:

$$\text{abs. } U_i \lesseqqgtr \Gamma \cdot \lambda,$$

wo λ einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Gestalt der Flächen ω und ω' abhängt.

IXb) Ist U_a die allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten, gegen einen inneren Punkt O konvexen Fläche, die sich aus einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion additiv zusammensetzt, und welche an einem Teil ω_1 der Fläche ω die Randwerte null hat, während sie an dem anderen Teile ω_2 der Fläche ω der Ungleichung genügt:

$$\text{abs. } U_a \lesseqqgtr \Gamma,$$

wo Γ eine endliche Konstante vorstellt, so ist auf irgend einer Fläche ω', welche ω in der Grenzkurve von ω_1 und ω_2 unter von null (π) verschiedenen Winkeln schneidet und sonst keine Punkte mit ω gemein hat:

$$\text{abs. } U_a \lesseqqgtr \Gamma \cdot \lambda,$$

wo λ einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Gestalt der Flächen ω und ω' abhängt.

Der Beweis der Sätze IXa), IXb) lässt die folgende Ausdehnung derselben zu:

Verallgemeinerung der Sätze IXa), IXb). Die Sätze IXa) und IXb) gelten für jede beliebige geschlossene Fläche ω, falls sich nachweisen lässt, dass allgemeine Potentialfunktionen u_i, u_a des Innen- resp. Aufsenraumes von ω existieren, welche sich aus je einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion additiv zusammensetzen, und welche an der Fläche ω_1 überall die Werte null, an der Fläche ω_2 überall die Werte 1 haben [54].

2. Kapitel.

Die Schwarzschen Methoden des alternierenden Verfahrens.

§ 1.

(Erster Typus.)

Es sei ω eine geschlossene, stetig gekrümmte, gegen einen inneren Punkt O konvexe Fläche, σ eine geschlossene Kurve auf derselben, die ω in die zwei Teile ω_1 und ω_2 zerlege; es sei ferner ω' eine weitere geschlossene, stetig gekrümmte, gegen einen inneren Punkt O' konvexe Fläche, welche ω in der Kurve σ unter von null verschiedenen Winkeln schneidet und sonst keinen Punkt mit ω gemein hat; den im Innenraum von ω gelegenen Teil der Fläche ω' bezeichnen wir mit ω_2', den im Aufsenraume von ω gelegenen Teil der Fläche ω' mit ω_1'.

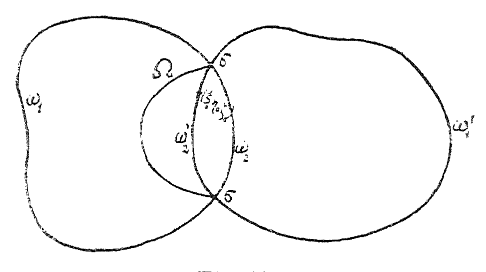


Fig. 66.

Es sei F eine Funktion der Stelle, welche in dem Innenraume von $\omega_1\,\omega_1'$ mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat; ihre Randwerte an den Flächen $\omega_1\,\omega_1'$ und ihre Werte auf $\omega_2\,\omega_2'$ bezeichnen wir mit f; wir wollen zeigen, dass wir die stetige, allgemeine Potential-

funktion des Innenraumes von $\omega_1\, \omega_1'$ konstruieren können, welche an den Flächen $\omega_1\, \omega_1'$ die Randwerte f besitzt.*)

Es sei u_1 die durch die Neumannsche Methode erhaltene stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω, welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt, so dass:

$$242_1\,a)\quad u_1 = f, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$

$$242_1\,b)\quad u_1 = f, \text{ an der Fläche } \omega_2.$$

Bezeichnen wir mit Γ den absolut gröfsten Wert von f, so ist:

$$242_1\,c)\quad \text{abs. } u_1 \leqq \Gamma, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

und auch:

$$242_1\,d)\quad \text{abs. } u_1 < \Gamma, \text{ an der Fläche } \omega_2'.$$

Wir können nun mit Hilfe der Neumannschen Methode die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω' konstruieren, für welche:

$$243_1\,a)\quad u_1' = f, \text{ an der Fläche } \omega_1',$$

$$243_1\,b)\quad u_1' = u_1, \text{ an der Fläche } \omega_2'.$$

Es lässt sich nämlich zeigen, dass die Funktion (f, u_1)**) den Bedingungen β) (S. 278) genügt. Konstruieren wir eine Fläche Ω mit der Randkurve σ, welche in dem Innenraum von $\omega_1\, \omega_2'$ verläuft und mit diesen Flächen aufser der Randkurve σ, in der sie mit $\omega_1\, \omega_2'$ unter von $0\,(\pi)$ verschiedenen Winkeln zusammentrifft, keinen Punkt gemein hat, so ist [wie leicht([53]) mit Hilfe von Zusatz 1 und 2 zu VIIIa) des I. Teiles und Satz 3b) in Anm.([24]) folgt] u_1 in dem Innenraume von Ω, ω_2' nicht blofs eindeutig und stetig, sondern auch regulär, es ist daher für irgend einen Punkt $(\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ an der Fläche ω_2' (im Aufsenraum von Ω, ω_2'):

---

*) Die folgende Untersuchung bleibt auch in Geltung, falls wir von der Funktion f der Stelle auf den Flächen $\omega\, \omega'$ nur wissen, dass sie auf diesem Flächenkomplex eindeutig und stetig ist (also auch in der Kurve σ für beide Flächen denselben Wert hat) und dass ihre ersten Ableitungen auf beiden Flächen regulär sind.

**) Wir deuten durch diese Bezeichnung die Funktion an, welche auf ω_1' die Werte f, auf ω_2' die Werte u_1 hat.

$$u_1 = + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega + \omega_2'} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega + \omega_2'} u_1 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

wenn ν die in den Innenraum von Ω, ω_2' hineingehende Normale von $d\omega$ bezeichnet, somit:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\Omega + \omega_2'} u_1 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\Omega + \omega_2'} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} - 4\pi \frac{\partial u_1}{\partial \nu};$$

hieraus folgt, da u_1 in dem Innenraume von Ω, ω_2' regulär ist, unter Zuhilfenahme des Satzes VIIIb) und seines 1. Zusatzes im I. Teile, dass die Funktion (u_1, f) den Bedingungen β) (S. 278) genügt. Damit ist nachgewiesen, dass u_1' mit Hilfe der Neumannschen Methode konstruierbar ist.

Es ist nun wiederum:

$$243_1\text{c})\quad \text{abs. } u_1' < \Gamma, \text{ an der Fläche } \omega_2',$$
$$243_1\text{d})\quad \text{abs. } u_1' \overline{\underline{<}} \Gamma, \text{ an der Fläche } \omega_2.$$

Wir konstruieren nun mit Hilfe der Neumannschen Methode die stetige, allgemeine Potentialfunktion u_2 des Innenraumes von ω, für welche:

$$u_2 = f, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$
$$u_2 = u_1', \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

— der Beweis der Anwendbarkeit der Neumannschen Methode ist genau, wie oben —, dann ist:

$$242_2\text{a})\quad u_2 - u_1 = 0, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$
$$242_2\text{b})\quad u_2 - u_1 = u_1' - f, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

somit:

$$242_2\text{c})\quad \text{abs. } (u_2 - u_1) \overline{\underline{<}} 2\Gamma, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$
$$242_2\text{d})\quad \text{abs. } (u_2 - u_1) \overline{\underline{<}} 2\Gamma\lambda, \text{ an der Fläche } \omega_2',$$

nach Satz IXa), wo λ einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Gestalt der Flächen ω und ω' abhängt.

Wir konstruieren weiter mit Hilfe der Neumannschen Methode die stetige, allgemeine Potentialfunktion u_2' des Innenraumes von ω', für welche:

$$u_2' = f, \text{ an der Fläche } \omega_1',$$
$$u_2' = u_2, \text{ an der Fläche } \omega_2',$$

dann ist:

$$243_2\text{a)}\quad u_2' - u_1' = 0, \text{ an der Fläche } \omega_1',$$

$$243_2\text{b)}\quad u_2' - u_1' = u_2 - u_1, \text{ an der Fläche } \omega_2',$$

somit:

$$243_2\text{c)}\quad \text{abs.}\,(u_2' - u_1') \overline{\gtrless} 2\Gamma\lambda, \text{ an der Fläche } \omega_2' \text{ (nach } 242_2\text{ d)},$$

$$243_2\text{d)}\quad \text{abs.}\,(u_2' - u_1') \overline{\gtrless} 2\Gamma\lambda^2, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

nach Satz IXa).

In dieser Weise gehen wir weiter und bilden die beiden unendlichen Reihen:

$$244)\quad u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots \equiv \lim_{n=\infty} u_n,$$

$$245)\quad u' = u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots \equiv \lim_{n=\infty} u_n',$$

dann stellt die Reihe 244) infolge der Relationen:

$$242\text{a)}\quad \left\{\begin{array}{r} u_1 = f, \\ u_2 - u_1 = 0, \\ u_3 - u_2 = 0, \\ \cdots\cdots \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega_1,$$

$$242\text{b)}\quad \left\{\begin{array}{r} u_1 = f, \\ u_2 - u_1 = u_1' - f, \\ u_3 - u_2 = u_2' - u_1', \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

$$242\text{c)}\quad \left\{\begin{array}{r} \text{abs. } u_1 \overline{\gtrless} \Gamma, \\ \text{abs. } (u_2 - u_1) \overline{\gtrless} 2\Gamma, \\ \text{abs. } (u_3 - u_2) \overline{\gtrless} 2\Gamma\lambda^2, \\ \text{abs. } (u_4 - u_3) \overline{\gtrless} 2\Gamma\lambda^4, \\ \cdots\cdots\cdots \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{an der Fläche } \omega_2, \text{ somit} \\ \text{auch im ganzen Innen-} \\ \text{raume von } \omega, \end{array}$$

eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω dar, für welche:

$$246)\quad \left\{\begin{array}{l} u = f, \text{ an der Fläche } \omega_1, \\ u = \lim_{n=\infty} u_n' = u', \text{ an der Fläche } \omega_2, \end{array}\right.$$

und die Reihe 245) stellt infolge der Relationen:

$$243\text{a)}\quad \left\{\begin{array}{r} u_1' = f, \\ u_2' - u_1' = 0, \\ u_3' - u_2' = 0, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega_1',$$

$$243\text{b)}\quad \left\{\begin{array}{r} u_1' = f, \\ u_2' - u_1' = u_1 - f, \\ u_3' - u_2' = u_2 - u_1, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega_2',$$

$$243\text{c)}\quad \left\{\begin{array}{r} \text{abs. } u_1' \overline{\overline{<}} \Gamma, \\ \text{abs. } (u_2' - u_1') \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda, \\ \text{abs. } (u_3' - u_2') \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda^3, \\ \text{abs. } (u_4' - u_3') \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda^5, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \end{array}\right| \begin{array}{c} \text{an der Fläche } \omega_2', \text{ somit} \\ \text{auch im ganzen Innen-} \\ \text{raume von } \omega', \end{array}$$

eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω' dar, für welche:

$$247)\quad \left\{\begin{array}{l} u' = f, \text{ an der Fläche } \omega_1', \\ u' = \lim\limits_{n=\infty} u_n = u, \text{ an der Fläche } \omega_2'. \end{array}\right.$$

In dem Innenraume von ω_2 und ω_2' sind die Funktionen u und u' identisch, da nach der zweiten Formel 246) und der zweiten Formel 247)

$$u - u' = 0, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$
$$u - u' = 0, \text{ an der Fläche } \omega_2'$$

somit nach Zusatz 2 zu II:

$$248)\quad u = u' \text{ im Innenraume von } \omega_2\,\omega_2'.$$

Die Formeln 246), 247) zeigen uns, dass die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\,\omega_1'$, die an den Flächen $\omega_1\,\omega_1'$ die Werte f annimmt, in dem Innenraume von ω durch die Reihe:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots,$$

im Innenraume von ω' durch die Reihe:

$$u' = u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots,$$

dargestellt wird.

Ein jedes derartiges alternierendes Verfahren, durch welches man die gesuchte, allgemeine Potentialfunktion in Gestalt unendlicher Reihen erhält, wollen wir in Zukunft als eine Schwarzsche Operation bezeichnen.

Xa) Sind ω und ω' zwei stetig gekrümmte, gegen je einen inneren Punkt konvexe, geschlossene Flächen, die sich in einer Kurve σ unter von null(π) verschiedenen Winkeln schneiden und aufser σ keinen Punkt gemein haben, und bezeichnet man mit $\omega_1\ \omega_1'$ die äufseren, mit $\omega_2\ \omega_2'$ die inneren Flächenteile, so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\ \omega_1'$ konstruieren, die an diesen Flächen die gegebenen Randwerte f annimmt, falls f der folgenden Bedingung genügt:

Es existiert eine Funktion F des Innenraumes von $\omega_1\ \omega_1'$, welche mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, endliche zweite Ableitungen hat und an den Flächen $\omega_1\ \omega_1'$ die Randwerte f besitzt,

oder der allgemeineren Bedingung:

Es existiert eine auf $\omega_1\ \omega_1'$ mit f übereinstimmende eindeutige und stetige Funktion des Flächenkomplexes $\omega\ \omega'$, deren erste Ableitungen auf ω und ω' regulär sind. [55]

§ 2.

(Zweiter Typus.)

Unter Beibehaltung der Bezeichnungen und Voraussetzungen des vorigen Paragraphen wollen wir zeigen, dass man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation auch die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_2\ \omega_2'$ konstruieren kann, die an diesen Flächen die gegebenen Randwerte f annimmt.

Es sei u_1 die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω, für welche:

$$249_1)\quad u_1 = f, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$
$$u_1 = f, \text{ an der Fläche } \omega_1;$$

u_1' die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω', für welche:

$$250_1)\quad u_1' = f - u_1, \text{ an der Fläche } \omega_2', \qquad u_1' = 0, \text{ an der Fläche } \omega_1';$$

es sei weiter u_2 die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω, für welche:

$$u_2 = f - u_1', \text{ an der Fläche } \omega_2, \qquad u_2 = 0, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$

so dass:

$$249_2)\quad u_2 - u_1 = - u_1', \text{ an der Fläche } \omega_2';$$

u_2' die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω', für welche:

$$u_2' = f - u_2, \text{ an der Fläche } \omega_2', \qquad u_2' = 0, \text{ an der Fläche } \omega_1',$$

so dass:

$$250_2)\quad u_2' - u_1' = - (u_2 - u_1), \text{ an der Fläche } \omega_2';$$

und so fort; es folgen dann wieder, wenn wir mit Γ den absolut gröfsten Wert von f bezeichnen, analog der Untersuchung des vorigen Paragraphen die Ungleichungen:

$$251)\left\{\begin{array}{c|c|c|c} \text{abs. } u_1 \overline{\overline{<}} \Gamma, & \text{im} & \text{abs. } u_1' \overline{\overline{<}} 2\Gamma, & \text{im} \\ \text{abs. } (u_2 - u_1) \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda, & \text{Innen-} & \text{abs. } (u_2' - u_1') \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda^2, & \text{Innen-} \\ \text{abs. } (u_3 - u_2) \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda^3, & \text{raume} & \text{abs. } (u_3' - u_2') \overline{\overline{<}} 2\Gamma\lambda^4, & \text{raume} \\ \dots\dots\dots & \text{von } \omega, & \dots\dots\dots & \text{von } \omega', \end{array}\right.$$

so dass die Reihen:

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots = \lim_{n=\infty} u_n,$$
$$u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots = \lim_{n=\infty} u_n'$$

im Innenraume von $\omega_2\, \omega_2'$ beide konvergieren.

Addieren wir alle Formeln 249), so folgt:

$$u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots = f - u_1' - (u_2' - u_1') - \cdots$$
(an der Fläche ω_2)

oder:

$$252\text{a})\left\{\begin{array}{l} u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots \\ + u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots \end{array}\right\} = f, \text{ (an der Fläche } \omega_2);$$

addieren wir alle Formeln 250), so folgt:

$$u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots = f - u_1 - (u_2 - u_1) - \cdots,$$
(an der Fläche ω_2),

oder:

$$252\text{b})\ \left\{\begin{array}{l} \quad u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots \\ + u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots \end{array}\right\} = f, \text{(an der Fläche } \omega_2'\text{)}.$$

Die Funktion:

$$253)\ \left\{\begin{array}{l} u = \quad u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots \\ \qquad + u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots \\ \quad = \lim\limits_{n=\infty} (u_n + u_n') \end{array}\right.$$

stellt somit die gesuchte Potentialfunktion dar.

Xb) Wir können bei den Voraussetzungen*) des Satzes Xa) mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation auch die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_2\ \omega_2'$ konstruieren, die an den Flächen $\omega_2\ \omega_2'$ die gegebenen Randwerte f besitzt.

§ 3.

(Dritter Typus.)

Xc) Es sei ω_1 eine beliebige geschlossene Fläche und ω_2 irgend eine zweite geschlossene Fläche, die ganz innerhalb ω_1 verläuft, und es sei uns eine Methode bekannt, stetige, allgemeine Potentialfunktionen des von $\omega_1\ \omega_2$ begrenzten Gebietes zu konstruieren, welche an der Fläche ω_1 bestimmte — gewissen hier nicht näher zu diskutierenden Bedingungen**) unterworfene — Randwerte f_1 annehmen, während ihnen an der Fläche ω_2 beliebige Randwerte f_2 zukommen sollen, die auf ω_2

*) Es sei nur hervorgehoben, dass f auf der Fläche ω_1' nicht mehr definiert zu sein braucht (resp. die Funktion F nicht im Aufsenraume von ω).

**) Es sei nur bekannt, dass auch die Funktion

$$f_1 = 1$$

diesen Bedingungen genügt.

mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind und endliche zweite Ableitungen haben; es sei ferner ω' eine geschlossene Fläche, welche ganz innerhalb des von ω_1 ω_2 begrenzten Gebietes verläuft und ω_2 in ihrem Innenraume enthält, und es sei uns eine Methode bekannt, stetige, allgemeine Potentialfunktionen des Innenraumes von ω' zu konstruieren, deren Randwerte f' an der Fläche ω' mit den Werten einer allgemeinen Potentialfunktion des von ω_1 ω_2 begrenzten Gebietes auf ω' übereinstimmen; wir können dann mit Hilfe einer Schwarzschen Operation die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω_1 konstruieren, die an der Fläche ω_1 die Randwerte f_1 annimmt.

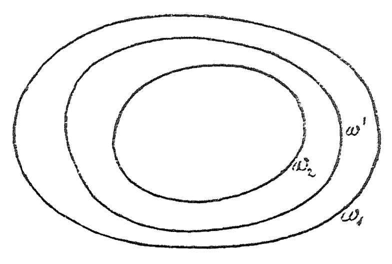


Fig. 67.

Sei nämlich u_1 die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω_1 ω_2, für welche:

$$254_1\,a)\quad u_1 = f_1, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$
$$254_1\,b)\quad u_1 = 0, \text{ an der Fläche } \omega_2;$$

es sei ferner u_1' die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω', für welche

$$255_1)\quad u_1' = u_1, \text{ an der Fläche } \omega'.$$

Es sei weiter u_2 die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω_1 ω_2, für welche:

$$u_2 = f_1, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$
$$u_2 = u_1', \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

dann ist:

$$254_2\,a)\quad u_2 - u_1 = 0, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$
$$254_2\,b)\quad u_2 - u_1 = u_1', \text{ an der Fläche } \omega_2;$$

es sei ferner u_2' die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω', für welche

$$u_2' = u_2, \text{ an der Fläche } \omega',$$

dann ist:

$$255_2)\quad u_2' - u_1' = u_2 - u_1, \text{ an der Fläche } \omega',$$

und so fort.

Wir bilden nun die unendlichen Reihen:

$$256)\quad u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots \equiv \lim_{n=\infty} u_n,$$

$$257)\quad u' = u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots \equiv \lim_{n=\infty} u_n',$$

dann stellt die Reihe 256) infolge der Relationen:

$$254\text{a})\quad \left\{\begin{array}{r} u_1 = f_1, \\ u_2 - u_1 = 0, \\ u_3 - u_2 = 0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega_1,$$

$$254\text{b})\quad \left\{\begin{array}{r} u_1 = 0, \\ u_2 - u_1 = u_1', \\ u_3 - u_2 = u_2' - u_1', \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\,\omega_2$ dar, für welche:

$$258)\quad \left\{\begin{array}{l} u = f_1, \text{ an der Fläche } \omega_1, \\ u = \lim\limits_{n=\infty} u_n' = u', \text{ an der Fläche } \omega_2; \end{array}\right.$$

die Reihe 257) stellt infolge der Relationen:

$$255)\quad \left\{\begin{array}{r} u_1' = u_1, \\ u_2' - u_1' = u_2 - u_1, \\ u_3' - u_2' = u_3 - u_2, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right| \text{ an der Fläche } \omega',$$

eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω' dar, für welche:

$$259)\quad u' = \lim_{n=\infty} u_n = u, \text{ an der Fläche } \omega',$$

falls die Reihe 256) im ganzen Innenraume von $\omega_1\,\omega_2$, die Reihe 257) im ganzen Innenraum von ω' konvergiert.

Das ergiebt sich aber aus den Formeln, welche sich analog der Untersuchung des § 1 mit Hilfe des Zusatzes zu IX in Anm. ([54]) successive ableiten lassen:

$$260)\quad \left\{\begin{array}{l|c|l|c} \text{abs. } u_1 \leqq \Gamma_1, & \text{im} & \text{abs. } u_1' \leqq \Gamma_1, & \text{im} \\ \text{abs. } (u_2 - u_1) \leqq \Gamma_1, & \text{Innen-} & \text{abs. } (u_2' - u_1') \leqq \Gamma_1 \lambda, & \text{Innen-} \\ \text{abs. } (u_3 - u_2) \leqq \Gamma_1 \lambda, & \text{raume} & \text{abs. } (u_3' - u_2') \leqq \Gamma_1 \lambda^2, & \text{raume} \\ \text{abs. } (u_4 - u_3) \leqq \Gamma_1 \lambda^2, & \text{von} & \text{abs. } (u_4' - u_3') \leqq \Gamma_1 \lambda^3, & \text{von} \\ \ldots\ldots\ldots & \omega_1\,\omega_2, & \ldots\ldots\ldots & \omega', \end{array}\right.$$

wo Γ_1 den absolut gröfsten Wert von f_1 und λ einen echten Bruch vorstellt.

In dem Innenraume von $\omega_2\,\omega'$ sind die Funktionen u und u' identisch, da nach der zweiten Formel 258):

$$u - u' = 0, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

und nach der Formel 259):

$$u - u' = 0, \text{ an der Fläche } \omega',$$

somit nach Zusatz 2 zu II:

$$261)\quad u = u', \text{ im Innenraume von } \omega_2\,\omega'.$$

Es zeigt sich somit, dass die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω_1, die an der Fläche ω_1 die Randwerte f_1 annimmt, in dem Innenraume von $\omega_1\,\omega_2$ durch die Reihe:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots,$$

im Innenraume von ω' durch die Reihe:

$$u' = u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots$$

dargestellt wird.

§ 4.

(Vierter bis sechster Typus.)

Genau analoge Methoden, wie sie durch die Untersuchungen in § 1 bis § 3 zur Konstruktion von allgemeinen Potentialfunktionen eines Innenraumes abgeleitet wurden, lassen sich auch

zur Konstruktion von allgemeinen Potentialfunktionen eines Aufsenraumes benützen; es gelten die folgenden Sätze:*)

Xd) Wir können bei den Bezeichnungen des Satzes Xa) mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation auch die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_2 ω_2' konstruieren, die an den Flächen ω_2 ω_2' die eindeutigen und stetigen Randwerte f annimmt, falls f der folgenden Bedingung genügt:

Es existiert eine Funktion F des Aufsenraumes von ω_2 ω_2', welche mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist, endliche zweite Ableitungen hat und an den Flächen ω_2 ω_2' die Randwerte f besitzt; oder der allgemeineren Bedingung:

Es existiert eine auf ω_2 ω_2' mit f übereinstimmende eindeutige und stetige Funktion des Flächenkomplexes ω ω', deren erste Ableitungen auf ω ω' regulär sind.(55)

Xe) Wir können bei den Voraussetzungen**) des Satzes Xd) mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation auch die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_1 ω_1' konstruieren, die an den Flächen ω_1 ω_1' die gegebenen Randwerte f annimmt.

Xf) Es sei ω_1 eine beliebige geschlossene Fläche und ω_2 irgend eine zweite geschlossene Fläche von solcher Beschaffenheit, dass ω_1 ganz innerhalb ω_2 verläuft, und es sei uns eine Methode bekannt, stetige, allgemeine Potentialfunktionen des von ω_1 ω_2 begrenzten Gebietes zu konstruieren, welche an der Fläche ω_1 bestimmte — gewissen, hier nicht näher zu diskutierenden Bedingungen unterworfene — Randwerte f_1 annehmen, während ihnen an der Fläche ω_2 beliebige Randwerte f_2 zukommen sollen, die auf ω_2 mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind und endliche zweite Ablei-

---

*) Es ist Beweis von Xd) genau analog dem Beweise von Xa);
" " Xe) " " " " " Xb);
" " Xf) " " " " " Xc).

**) Es sei nur hervorgehoben, dass f auf der Fläche ω_2' nicht mehr definiert zu sein braucht (resp. die Funktion F nicht im Innenraume von ω).

tungen haben; es sei ferner ω' eine geschlossene Fläche, welche ganz innerhalb des von ω_1 ω_2 begrenzten Gebietes verläuft und ω_1 in ihrem Innenraume enthält, und es sei uns eine Methode bekannt, stetige, allgemeine Potentialfunktionen des Aufsenraumes von ω' zu konstruieren, deren Randwerte f' an der Fläche ω' mit den Werten einer allgemeinen Potentialfunktion des von ω_1 ω_2 begrenzten Gebietes auf ω' übereinstimmen; wir können dann mit Hilfe einer Schwarzschen Operation die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_1 konstruieren, die an der Fläche ω_1 die Randwerte f_1 annimmt.

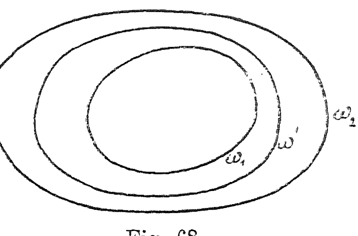


Fig. 68.

§ 5.

(Kombination von Kugelflächen.)

Wir haben bisher die Schwarzschen Methoden (erster, zweiter, vierter, fünfter Typus) zur Konstruktion stetiger, allgemeiner Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes von Flächen benützt, die sich aus zwei Teilen von stetig gekrümmten, geschlossenen, gegen je einen inneren Punkt konvexen Flächen zusammensetzen, unter der Bedingung, dass sich diese beiden Teile unter Winkeln θ schneiden, die den Ungleichungen:

$$0 < \theta < \pi,$$

oder

$$\pi < \theta < 2\pi,$$

in strengem Sinne genügen.

Für den Fall, dass die zu kombinierenden Flächen Teile von Kugelflächen sind, werden sich offenbar die den Randwerten f in den Sätzen Xa), Xb), Xd), Xe) auferlegten Bedingungen wesentlich verallgemeinern lassen; wir beschränken uns auf die Untersuchung des ersten Typus (Xa); die Betrachtung der übrigen drei Fälle ist ganz analog. Wir beschäftigen uns also mit der folgenden Aufgabe:

Es seien ω und ω' zwei Kugelflächen und f eine Funktion der Stelle auf denselben; die beiden Kugelflächen sollen sich in einem Kreise σ unter einem von null verschiedenen Winkel θ schneiden, die äufseren Flächenteile mögen wieder $\omega_1\,\omega_1'$, die inneren $\omega_2\,\omega_2'$ heifsen; es handelt sich um die Konstruktion — wir wollen die Aufgabe gleich recht allgemein stellen — einer allgemeinen Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\,\omega_1'$, die sich aus stetigen und regulären allgemeinen Potentialfunktionen

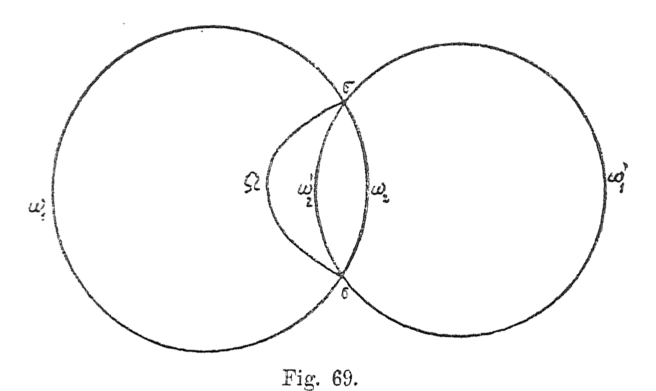


Fig. 69.

additiv zusammensetzt und an den Flächen $\omega_1\,\omega_1'$ die Randwerte f hat; wir werden sehr allgemeine Bedingungen aufstellen, unter denen die Konstruktion der gesuchten Funktion mit Hilfe einer Schwarzschen Operation möglich ist.

Wir setzen von f voraus, dass es auf ω und ω' abteilungsweise eindeutig und stetig ist, dass seine ersten Ableitungen eindeutig und stetig sind, solange man sich in endlicher Entfernung von den Trennungskurven der beiden Kugelflächen (in bezug auf f) hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho\,\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{h}} = \varDelta(\varrho)$$

erfüllt sind, und es möge f aufserdem für jede der Flächen ω und ω' den Bedingungen γ'*) (oder den allgemeineren Bedingungen γ) genügen.

---

*) Siehe S. 288.

Versuchen wir jetzt, die Schwarzsche Methode (§ 1) anzuwenden, so können wir zunächst mit Hilfe der Erweiterung des Satzes V (S. 289) die Funktion u_1 angeben, es wird sich nun darum handeln, zu untersuchen, ob wir die Funktion u_1' mit Hilfe desselben Satzes angeben können, d. h. ob die Funktion

$$\begin{gathered} f \text{ auf } \omega_1', \\ u_1 \text{ auf } \omega_2' \end{gathered}$$

sich den Bedingungen γ) unterordnet. Dieselben sind jedenfalls erfüllt, wenn bei genügender Annäherung an den Kreis σ auf der Fläche ω_2'

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega_2'} u_1 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \varDelta(\varrho)$$

ist, mit eventueller Ausnahme ([56]) bei der Annäherung an einzelne Punkte auf σ, für welche nur

$$\text{abs. } \varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega_2'} u_1 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \lesseqgtr \text{endl. Konstante}$$

zu sein braucht.

Denken wir uns nun wieder die Fläche Ω (vgl. § 1), welche die Randkurve σ hat, im Innenraum von $\omega_1\, \omega_2'$ verläuft und $\omega_1\, \omega_2'$ in der Randkurve σ, aufser der sie keinen Punkt mit $\omega_1\, \omega_2'$ keinen Punkt gemein hat, unter von null verschiedenen Winkeln schneidet, so gilt wieder für einen Punkt $(\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ der Fläche ω_2' (an der Aufsenseite in bezug auf den Innenraum von $\omega_1\, \omega_2'$) die Formel:

$$\frac{\partial u_1}{\partial \nu_0} = -\frac{1}{4\pi} \int_{\omega_2' + \Omega} \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega - \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \int_{\omega_2' + \Omega} u_1 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

wenn ν_0 die in den Innenraum von $\omega_1\, \omega_2'$ hineingehende Normale von ω_2' in $(\xi_0\, \eta_0\, \zeta_0)$ vorstellt. Nach VIIIb) des I. Teiles und Erweiterung dieses Satzes in Anm. ([24]) wird somit bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ von σ

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega_2'} u_1 \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

den obigen Bedingungen genügen, wenn $\frac{\partial u_1}{\partial \nu}$ selbst auf ω_2' und Ω die Bedingungen erfüllt, dass bei genügender Annäherung an den Kreis σ auf der Fläche ω_2'

$$\varrho \frac{\partial u_1}{\partial \nu} = \varDelta(\varrho)$$

ist, mit eventueller Ausnahme(56) bei der Annäherung an einzelne Punkte auf σ, für welche nur

$$\text{abs. } \varrho \frac{\partial u_1}{\partial \nu} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konstante}$$

zu sein braucht.

Das folgt aber nach Zusatz 2 zu VIIIa) des I. Teiles resp. Zusatz 3 zu VIIIa) in Anm. (23), falls die Trennungskurven der Fläche ω, in denen f springt, keinen Punkt mit σ gemeinsam haben oder jedenfalls nur vereinzelte Punkte; es würden die obigen Bedingungen nicht mehr erfüllt sein, falls eine jener Trennungskurven mit dem Kreise σ ein endliches Stück gemein hätten. Ist letzteres aber nicht der Fall, so ist die Funktion u_1' konstruierbar, in analoger Weise fortgehend auch u_2, u_2', ... Der übrige Teil des Beweises von Xa) ist ohne weiteres auf unseren Fall übertragbar, es ist nur zu bemerken, dass die Funktionen

$$u_3 - u_2,\ u_4 - u_3,\ \ldots$$
$$u_2' - u_1',\ u_3' - u_2',\ \ldots$$

nicht blofs reguläre, sondern auch stetige allgemeine Potentialfunktionen des Innenraumes von ω resp. ω' sein werden, so dass sich die Funktionen:

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) + (u_3 - u_2) + \cdots, \text{ in dem Innenraume von } \omega,$$
$$u' = u_1' + (u_2' - u_1') + (u_3' - u_2') + \cdots, \text{ in dem Innenraume von } \omega'$$

aus je einer regulären und einer stetigen allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzen und somit wegen der Gleichheit ihrer Werte an den Flächen ω_2 und ω_2' in dem Innenraume von $\omega_2\,\omega_2'$ identisch sein müssen.

Wir erhalten so den

Zusatz zu Xa). Sind ω_1 und ω_1' Teile zweier Kugeln ω und ω', deren Innenwinkel θ der Ungleichung:

$$\pi < \theta < 2\pi$$

in strengem Sinne genügt; ist ferner f eine abteilungsweise eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf ω und ω', deren erste Ableitungen in endlicher Entfernung von den Trennungskurven der Flächen $\omega\,\omega'$ (in bezug auf f) eindeutig und stetig sind, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial h} = \varDelta(\varrho)$$

erfüllt sind; genügt endlich die Funktion f auf ω und ω' den Bedingungen γ') (oder den allgemeineren Bedingungen γ), so kann man mit Hilfe einer Schwarzschen Operation die sich aus einer regulären und einer stetigen allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\,\omega_1'$ konstruieren, welche an den Flächen $\omega_1\,\omega_1'$ die Randwerte f besitzt, wenn die Trennungskurven von ω und ω', in denen f springt, entweder keinen Punkt mit dem Kreise σ gemeinsam haben, in dem sich die Kugelflächen $\omega\,\omega'$ schneiden, oder wenn sie diesen Kreis σ in einzelnen Punkten unter von null verschiedenen*) Winkeln schneiden.

Wir können offenbar einen solchen Zusatz auch den Sätzen Xb), Xd), Xe) beifügen; wir sprechen hier nur den Zusatz zu Xe) aus, der für äufsere Probleme dasselbe leistet, wie der Zusatz zu Xa) für innere Probleme.

Zusatz zu Xe). Man kann bei den Voraussetzungen des Zusatzes zu Xa) auch mit Hilfe einer Schwarzschen Operation die sich aus einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von $\omega_1\,\omega_1'$ konstruieren, welche an den Flächen $\omega_1\,\omega_1'$ die Randwerte f besitzt.

Es seien nun ω_1 und ω_1' zwei beliebige geschlossene Flächen von solcher Beschaffenheit, dass ω_1' ganz innerhalb ω_1 liege, es sei ferner ω_2 eine dritte geschlossene Fläche, die ganz inner-

*) Diese Voraussetzung wird durch die Anwendung der Sätze des I. Teiles stillschweigend eingeführt.

halb ω_i' verläuft und f' irgend eine allgemeine Potentialfunktion des von $\omega_1\,\omega_2$ begrenzten Gebietes.

Es seien weiter $(R_1)\,(R_2)$ zwei innerhalb ω_1 gelegenen Kugelflächen, die sich in dem Kreise σ unter einem von null verschiedenen Winkel schneiden und von der Fläche ω_i' in solcher Weise geschnitten werden, dass die Schnittkurven mit dem Kreise σ nur einzelne Punkte gemein haben und in diesen mit ihr unter von null verschiedenen Winkeln zusammentreffen. Die äufseren, im Aufsenraume von ω_i' gelegenen Teile von (R_1) und (R_2) bezeichnen wir mit A_1 und A_2, die äufseren, im Innenraume von

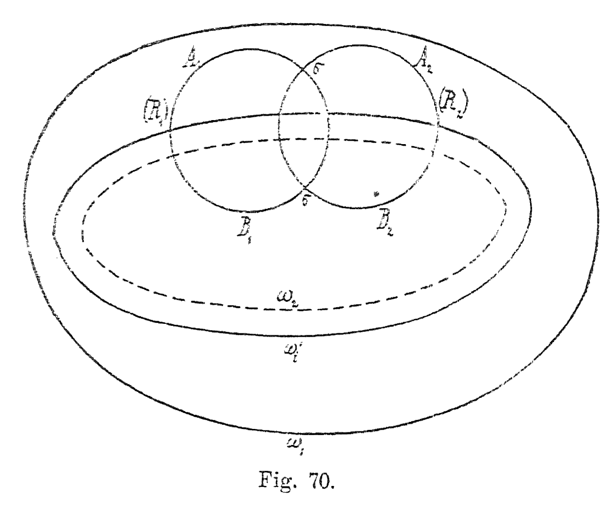


Fig. 70.

ω_i' gelegenen Teile von (R_1) und (R_2) mit B_1 und B_2; wir können nach Zusatz zu Xa) die sich aus einer regulären und einer stetigen, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von

$$A_1\,A_2\,B_2\,B_1$$

konstruieren, die an den Flächen A_1, A_2 die Randwerte f', an den Flächen B_1, B_2 die Randwerte F hat, von denen vorausgesetzt werde, dass sie Werte einer Funktion sind, die im Innenraume von ω_i' mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

Wir gelangen nun durch successive (57) Anwendung des Zusatzes zu Xa) auf n Kugelflächen $(R_1)\,(R_2)\ldots(R_n)$, die sich in einer durch

die Figur 71 angedeuteten Weise aneinanderschliefsen und den äufseren Kranz $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n$, den inneren Kranz $\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_n$ bilden, mit Hilfe einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen zur Lösung des folgenden Problemes:

Die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n$ und $\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_n$ zu konstruieren, die an den Flächen $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n$ die Randwerte f′, an den Flächen $\beta_1\,\beta_2\,\ldots\,\beta_n$ die Randwerte F hat. Wir gelangen schliefslich mit Hilfe einer endlichen Anzahl von (in der Figur schwach markierten) Kugeln $(\overline{R}_j)$, von denen je zwei untereinander und mit den Kugeln (R_1) (R_2) ... (R_n)

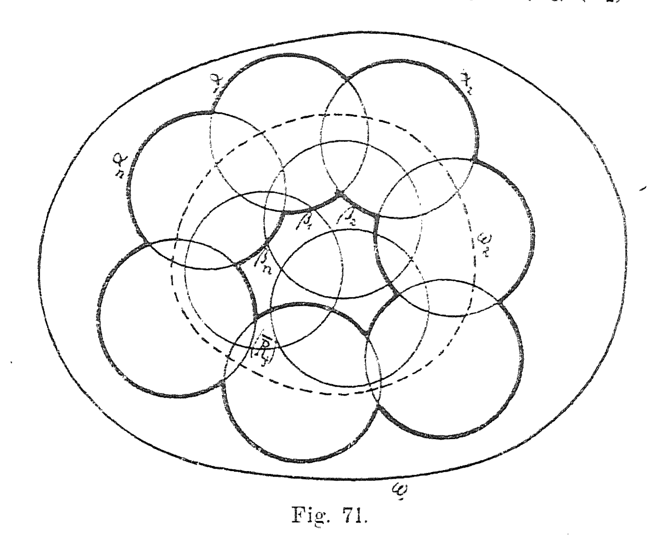


Fig. 71.

zusammen den Bedingungen des Zusatzes zu Xa) genügen, auch mit Hilfe einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen zur Lösung des folgenden Problemes:

Die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n$ zu konstruieren, die an den Flächen $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n$ die Randwerte f′ hat; wir können somit den folgenden Satz aussprechen:

XIa) Ist ω_1 irgend eine geschlossene Fläche, ω_2 irgend eine zweite geschlossene Fläche, die ganz innerhalb ω_1 verläuft, und f′ irgend eine allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\,\omega_2$, so können wir stets eine geschlossene, aus einer endlichen Anzahl von Kugelkalotten $\alpha_1\,\alpha_2\,\ldots\,\alpha_n$ bestehende Fläche konstruieren, die

ganz innerhalb des von ω_1 und ω_2 begrenzten Raumes verläuft, und wir können die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$, die an den Flächen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Randwerte f′ hat, mit Hilfe einer endlichen Anzahl von Schwarzschen Operationen konstruieren.

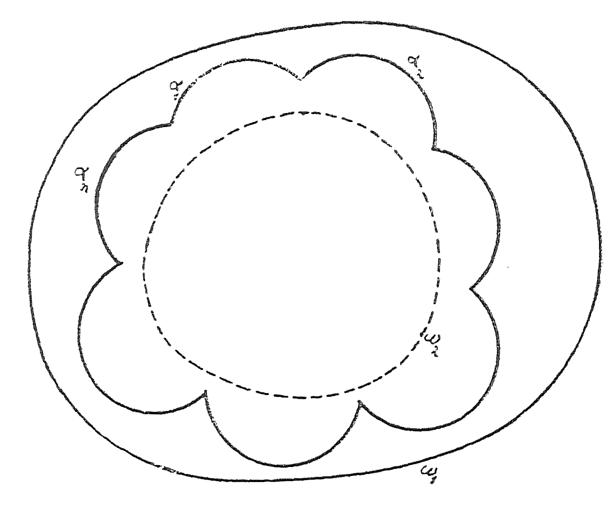


Fig. 72.

In vollkommen analoger*) Weise ergiebt sich der Satz:

XIb) Wir können bei den Voraussetzungen des Satzes XIa) gleichfalls mit Hilfe einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ konstruieren, die an den Flächen $\alpha_1\ \alpha_2 \ldots \alpha_n$ die Randwerte f′ hat.

§ 6.

(Kombination von Kugelflächen und stetig gekrümmten, geschlossenen, gegen je einen inneren Punkt konvexen Flächen.)

Gehen wir den Beweis des Zusatzes zu Xa) noch einmal unter der Voraussetzung durch, dass nicht beide Flächen ω und ω'

---

*) Nur genügen hier zum Beweise bereits die Kombinationen (R_1) (R_2) ... (R_n); man braucht hier die ($\overline{R_j}$) nicht.

Kugelflächen sind, sondern nur die Fläche ω', während die Fläche ω nur eine stetig gekrümmte, geschlossene, gegen einen inneren Punkt konvexe Fläche ist, so sehen wir, dass alle Schlüsse in Gültigkeit bleiben, wenn für die Funktion f auf der Fläche ω noch die Bedingung hinzukommt, dass ihre ersten Ableitungen in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven auf ω regulär sind.

Dieselben Erweiterungen lassen auch natürlich Typus 2, 4, 5 der Schwarzschen Methode zu, und während wir bisher haupt-

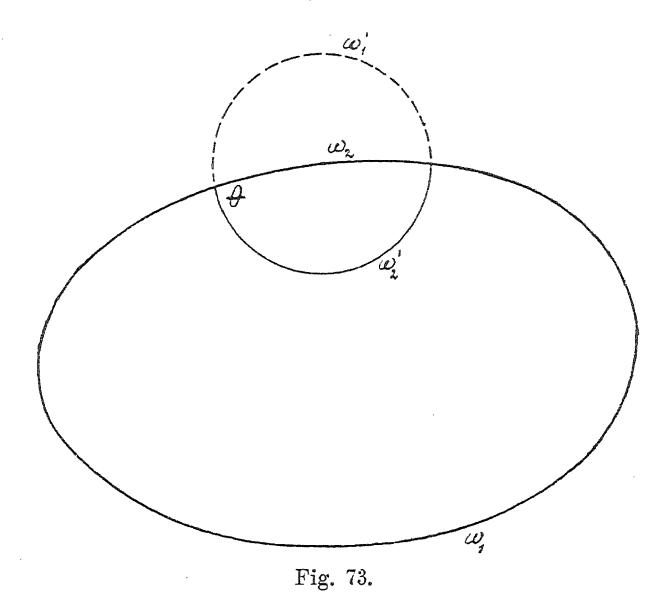


Fig. 73.

sächlich von Typus 1 und 5 Anwendung gemacht haben, kommt es uns nun hier auf die Erweiterung von Typus 2 und 4 wesentlich an, und wir können die beiden folgenden Sätze aussprechen:

Zusatz zu Xb). Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene, gegen einen inneren Punkt konvexe Fläche und ω_2' eine Kugelkalotte, die mit ω_2 Winkel θ einschliefst, welche der Ungleichung:

$$0 < \theta < \pi$$

in strengem Sinne genügen; ist ferner f eine abteilungsweise stetige Funktion auf ω und ω_2', deren erste Ableitungen in endlichen Entfernungen von den Trennungs-

kurven der Flächen $\omega\, \omega_2'$ (in bezug auf f) auf der Kugelkalotte ω_2' eindeutig und stetig, auf der Fläche ω regulär sind, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \frac{\partial f}{\partial h} = \Delta(\varrho)$$

erfüllt sind; genügt endlich die Funktion f auf ω und ω_2' den Bedingungen γ') (oder den allgemeineren Bedingungen γ), so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation die sich aus einer regulären und einer stetigen Potentialfunktion zusammensetzende allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_2\, \omega_2'$ konstruieren, welche an den Flächen $\omega_2\, \omega_2'$ die Randwerte f annimmt, wenn die Trennungskurven von $\omega\, \omega_2'$, in denen f springt, entweder keinen Punkt mit der Schnittkurve σ von ω und ω' gemeinsam haben, oder wenn sie diese Schnittkurve in einzelnen Punkten unter von null verschiedenen Winkeln schneiden.

Zusatz zu Xd). Man kann bei den Voraussetzungen des Zusatzes zu Xb) auch mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation die sich aus einer stetigen und einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von $\omega_2\, \omega_2'$ konstruieren, welche an den Flächen $\omega_2\, \omega_2'$ die Randwerte f annimmt.

3. Kapitel.

Lösung des inneren Problemes.

§ 1.

Es sei ω eine beliebige geschlossene Fläche, ω_i' eine beliebige zweite geschlossene Fläche, die ganz innerhalb von ω verläuft, der Fläche ω aber beliebig nahe sein kann. Es sei ferner F eine Funktion der Stelle in dem von $\omega\, \omega_i'$ begrenzten Raume, die mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat; ihre Randwerte an der Fläche ω seien

mit f bezeichnet; wir werden zeigen, dass wir mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω konstruieren können, welche an der Fläche ω die Randwerte f hat.

Wir können eine **endliche** Anzahl von Kugelflächen (R_1) $(R_2) \ldots (R_n)$ konstruieren, welche die Fläche ω in den Kurven $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ unter Winkeln θ schneiden, die der Ungleichung

$$0 < \theta < \pi$$

in strengem Sinne genügen, und die Kugelflächen $(R_1)\,(R_2) \ldots (R_n)$, welche sich in der in der Figur angedeuteten Weise an einander

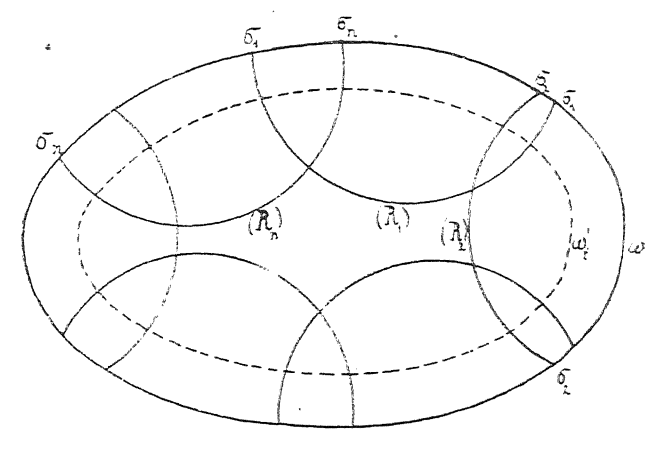


Fig. 74.

schliefsen und von null verschiedene Winkel mit einander bilden, sollen auch von der Fläche ω_i' unter von null verschiedenen Winkeln geschnitten werden. Schliefslich sollen die von $\sigma_1\, \sigma_2 \ldots \sigma_n$ begrenzten Teile $\Omega_1\, \Omega_2 \ldots \Omega_n$ von ω gegen je einen Punkt $O_1\, O_2 \ldots O_n$ konvex*) sein. Diese Konstruktion lässt sich stets erreichen, wenn man die Fläche ω_i' der Fläche ω genügend nahe annimmt.

*) d. h. bei unserer früheren Definition (S. 235), dass sich irgend ein Punkt O_1 resp. $O_2 \ldots$ im Raume finden lässt, durch den sich keine Tangentialebene zu dem betreffenden Flächenstück legen lässt.

Wir greifen den von Ω_1 und (R_1) [dem im Innenraume von ω gelegenen Teile der Kugelfläche (R_1)] begrenzten Raum heraus und bezeichnen die Kurve, in der die Kugelfläche (R_1) die Fläche ω_i' schneidet, mit σ_1'.

Wir können nach Zusatz zu Xb) mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer Schwarzschen Operation, die sich aus einer stetigen und einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende, allgemeine Potentialfunktion dieses Raumes konstruieren, welche an der Fläche Ω_1 und dem von σ_1 und σ_1' begrenzten Teile der Kugelfläche (R_1) die Randwerte F und an

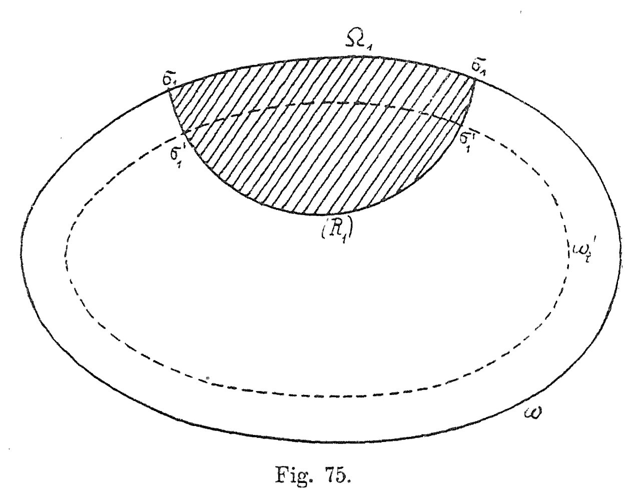


Fig. 75.

dem von σ_1' begrenzten Teile der Kugelfläche (R_1) die Werte f_2 hat, wo f_2 eine beliebige Funktion der Stelle sein soll, die in dem Innenraume von ω_i' mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

Wir gehen nun zu einer Kombination zweier Räume von der betrachteten Form über, etwa der Kombination des von Ω_1 und (R_1) begrenzten Raumes mit dem von Ω_2 und (R_2) begrenzten Raume, nur wollen wir, um Übereinstimmung mit dem Typus 1 der Schwarzschen Methode herbeizuführen, die folgenden Bezeichnungen wählen:

Wir bezeichnen

mit ω_1 die Fläche Ω_1 und den aufserhalb des zweiten Raumes gelegenen Teil der Kugelkalotte (R_1),

mit ω_1' die Fläche Ω_2 und den aufserhalb des ersten Raumes gelegenen Teil der Kugelkalotte (R_2),

mit ω_2 den innerhalb des zweiten Raumes gelegenen Teil der Kugelkalotte (R_1),

mit ω_2' den innerhalb des ersten Raumes gelegenen Teil der Kugelkalotte (R_2).

Wir können mit Hilfe des Typus 1 der Schwarzschen Methode die sich aus einer stetigen und einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende, allgemeine Potentialfunktion des von ω_1 und ω_1' begrenzten Raumes konstruieren, welche an den aufserhalb ω_i' gelegenen Teilen von ω_1 und ω_1' die Rand-

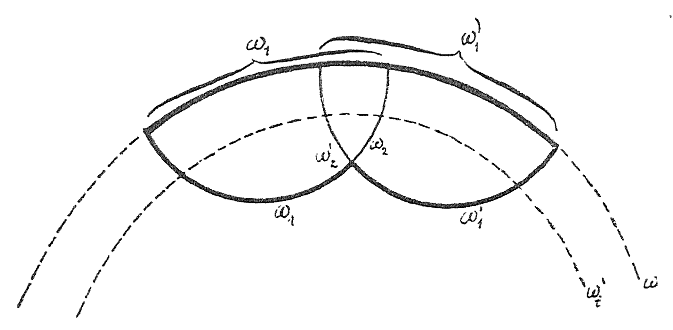


Fig. 76.

werte F, an den innerhalb ω_i' gelegenen Teilen von ω_1 und ω_1' die Randwerte f_2 hat.

Um zu beweisen, dass uns die in § 1 auseinandergesetzte Methode (Typus 1) zur Lösung dieser Aufgabe führt, wäre, wie es auf den ersten Blick scheint, der Nachweis notwendig, dass man eine sich aus einer stetigen und einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende allgemeine Potentialfunktion des von ω_1 ω_2 begrenzten Raumes konstruieren kann, die an der Fläche ω_1 die Randwerte null, an der Fläche ω_2 die Randwerte 1 hat. Diese Möglichkeit ist nun durch den Zusatz zu Xb) nicht gegeben, da die Kurve, in der die Randwerte springen, mit der Kurve σ_1 ein endliches Stück gemein hat. Man kann nichtsdestoweniger die Giltigkeit der Schwarzschen Methode (Typus 1) in diesem Falle bereits aus der aus Zusatz zu Xb) folgenden Existenz der sich aus einer stetigen und einer regulären, allgemeinen

Potentialfunktion zusammensetzenden allgemeinen Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\ \omega_2$ ableiten, welche an dem im Aufsenraume von $\omega_1'\ \omega_2'$ liegenden Teile der Grenzfläche die Werte null, an dem im Innenraume von $\omega_1'\ \omega_2'$ liegenden Teile der Grenzfläche die Werte 1 hat. Es folgt aus der Existenz dieser Funktion wieder, analog dem Beweise des Satzes IXa) (resp. seiner Verallgemeinerung S. 299), dass irgend eine sich aus einer stetigen und einer regulären, allgemeinen Potentialfunktion zusammensetzende allgemeine Potentialfunktion U des Innenraumes von $\omega_1\ \omega_2$, die an ω_1 die Werte null, an ω_2 die absolut gröfsten Werte Γ besitzt, auf ω_2' Werte hat, die der Ungleichung:

$$\mathrm{U} \gtreqless \lambda \cdot \Gamma$$

entsprechen, wo λ einen lediglich von der Gestalt der Flächen $\omega_1\ \omega_2\ \omega_2'$ abhängenden echten Bruch vorstellt. Das blieb aber lediglich zur Anwendung der Schwarzschen Methode (Typus 1) zu beweisen.

Wie wir nun die Innenräume von $\Omega_1(\mathrm{R}_1)$ und $\Omega_2(\mathrm{R}_2)$ kombiniert haben, können wir alle Innenräume:

$$\Omega_1(\mathrm{R}_1),\quad \Omega_2(\mathrm{R}_2)\ \ldots,\quad \Omega_n(\mathrm{R}_n)$$

Fig. 77.

successive mit einander kombinieren, und wir gelangen so zu der Lösung der folgenden Aufgabe:

Die stetige, allgemeine Potentialfunktion des von ω und den Kugelkalotten $(\mathrm{R}_1)(\mathrm{R}_2)\ldots(\mathrm{R}_n)$ begrenzten Raumes

zu konstruieren, welche an der Fläche ω die Randwerte f hat, während ihre Randwerte f_2 an der aus den Kugelkalotten $(R_1)(R_2)\ldots(R_n)$ bestehenden Fläche ω_2 (die ganz innerhalb ω_i' liegt) Werte einer beliebig gewählten Funktion der Stelle auf ω_2 sind, die mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat,

mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen.

Es ist leicht([55]) zu übersehen, dass wir die Bedingungen, welche wir den Randwerten f an der Fläche ω vorgeschrieben haben, folgendermafsen erweitern können:

Wir kennen eine Funktion F der Stelle in dem von ω und ω_i' begrenzten Raume, deren Randwerte f an der Fläche ω eindeutig und stetig sind und reguläre erste Ableitungen haben, während die ersten Ableitungen von F in endlicher Entfernung von ω eindeutig und stetig sind und bei genügender Annäherung*) an ω die Relationen:

$$\varrho \frac{\partial F}{\partial h} = J(\varrho)$$

erfüllen, wo h eine beliebige Richtung vorstellt, und es soll schliefslich das über irgend eine in dem von ω und ω_i' begrenzten Raume konstruierte geschlossene Fläche Ω zu erstreckende Integral:

$$\int_{\Omega} F \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Fläche Ω eindeutige und stetige normale Ableitungen haben.

§ 2.

Wir können nach XIa) eine ganz innerhalb des von ω und ω_2 begrenzten Raumes verlaufende, aus Kugelkalotten bestehende, geschlossene Fläche ω' konstruieren und mittelst einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω' bestimmen, deren Randwerte an der Fläche ω' mit den Werten irgend einer allgemeinen Potentialfunktion des von ω und ω_2 begrenzten Raumes auf der Fläche ω' übereinstimmen.

---

*) Auf einer Fläche, die ω unter von null verschiedenen Winkeln schneidet.

Infolge dieser Überlegung und des Resultates des vorigen Paragraphen ergiebt sich, dass alle Voraussetzungen des Satzes Xc)

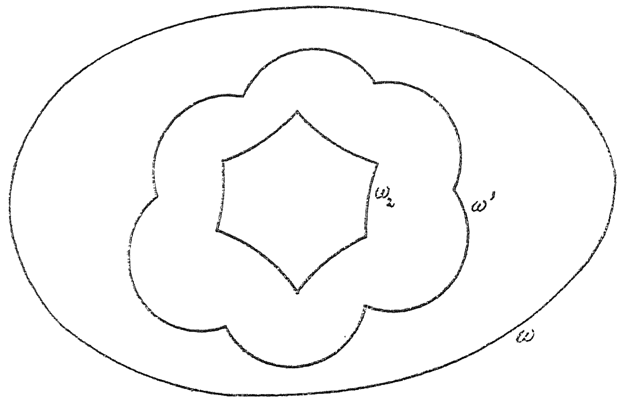


Fig. 78.

(Typus 3 der Schwarzschen Methoden) erfüllt sind, und wir gelangen zu dem Endresultat;

XIIa) Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_1' eine beliebige, ganz innerhalb von ω ver-

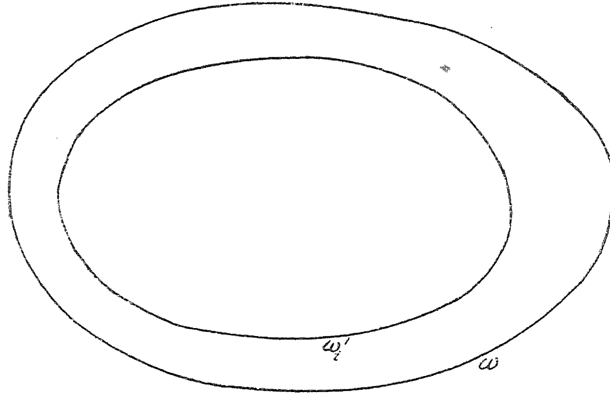


Fig. 79.

laufende und ω beliebig nahe gelegene, geschlossene Fläche, so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer **endlichen** Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des

Innenraumes von ω konstruieren, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn man eine mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige und mit ihren zweiten Ableitungen endliche Funktion F des Innenraumes von $\omega\,\omega_i'$ kennt, welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt.

Da alle Schlüsse unserer Untersuchung in Gültigkeit bleiben, wenn die Funktion f die allgemeineren in § 1 klein gedruckten Bedingungen erfüllt, so können wir XIIa) folgendermafsen erweitern:

XIIb) Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_i' eine beliebige, ganz innerhalb von ω verlaufende und ω beliebig nahe gelegene, geschlossene Fläche, so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer **endlichen** Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω konstruieren, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn man eine Funktion F des Innenraumes von $\omega\,\omega_i'$ kennt, die folgenden Bedingungen genügt:

F soll in dem Innenraum von $\omega\,\omega_i'$ eindeutig und stetig sein und an der Fläche ω die Randwerte f haben, deren erste Ableitungen auf ω regulär sind; die ersten Ableitungen von F sollen ferner in endlicher Entfernung von ω eindeutig und stetig sein und bei genügender Annäherung*) an die Fläche ω den Relationen:

$$\varrho \frac{\partial F}{\partial h} = \varDelta(\varrho)$$

genügen, wo h eine beliebige Richtung bezeichnet, und es soll schliefslich das über eine beliebig in dem Innenraum von $\omega\,\omega_i'$ konstruierte, geschlossene Oberfläche Ω zu erstreckende Integral:

$$\int\limits_{\Omega} F \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

an der Fläche Ω eindeutige und stetige normale Ableitungen haben.

Die Bedingungen von XIIb) sind im besonderen erfüllt, wenn F eine Potentialfunktion des von ω und ω_i' begrenzten Raumes ist, deren Randwerte an der Fläche ω reguläre erste Ableitungen haben; ist nämlich in diesem Falle Ω irgend eine geschlossene Fläche in dem Innenraume von $\omega\,\omega_i'$, so ist für irgend einen an der Innenseite von Ω gelegenen Punkt $(\xi_0\,\eta_0\,\zeta_0)$:

$$\frac{\partial F}{\partial \nu_0} = + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega} \frac{\partial F}{\partial \nu} \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\, d\omega + \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial \nu_0} \int\limits_{\Omega} F \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

*) Auf einer Fläche, welche ω unter von null verschiedenen Winkeln schneidet.

wenn ν die innere Normale von $d\omega$, ν_0 die innere Normale von Ω in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ vorstellt, es ist somit wegen der Stetigkeit von $\frac{\partial F}{\partial \nu}$ resp. $\frac{\partial F}{\partial \nu_0}$ auch:

$$\frac{\partial}{\partial \nu_0} \int\limits_{\Omega} F \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Fläche Ω stets eindeutig und stetig, und es folgt:

XIIc) Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_i' eine beliebige, ganz innerhalb von ω verlaufende und ω beliebig nahe gelegene, geschlossene Fläche, so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von ω konstruieren, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn man eine Potentialfunktion F des Innenraumes von $\omega\,\omega_i'$ kennt, welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt, deren erste Ableitungen auf ω regulär sind.

4. Kapitel.

Lösung des äufseren Problemes.

§ 1.

Es sei ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_a' eine beliebige geschlossene Fläche von solcher Beschaffenheit, dass ω ganz innerhalb ω_a' verläuft; wir können analog den Untersuchungen des vorigen Kapitels zeigen, dass wir mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω konstruieren können, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn die Werte f zugleich Randwerte einer Funktion F des Innen-

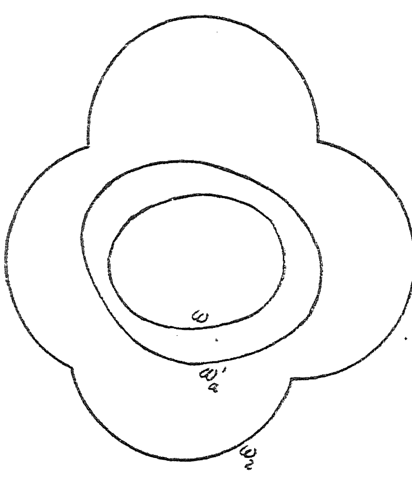


Fig. 80.

raumes von $\omega\,\omega_a'$ sind, welche in dem Innenraume von $\omega\,\omega_a'$ die in XIIa) [XIIb) oder XIIc)] der Funktion F in dem Innenraum von $\omega\,\omega_i'$ vorgeschriebenen Bedingungen erfüllen.

Wir können zunächst analog der Betrachtung in § 1 des 3. Kapitels die stetige, allgemeine Potentialfunktion des von ω und einer aus lauter Kugelkalotten bestehenden, im Aufsenraume von ω_a' verlaufenden Fläche ω_2 konstruieren, welche an der Fläche ω die Randwerte f, an der Fläche ω_2 die Werte einer Funktion f_2 hat, welche aufserhalb ω_a' mit ihren ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

§ 2.

Wir können nach XIb) weiter eine ganz innerhalb des von ω und ω_2 begrenzten Raumes verlaufende, aus Kugelkalotten be-

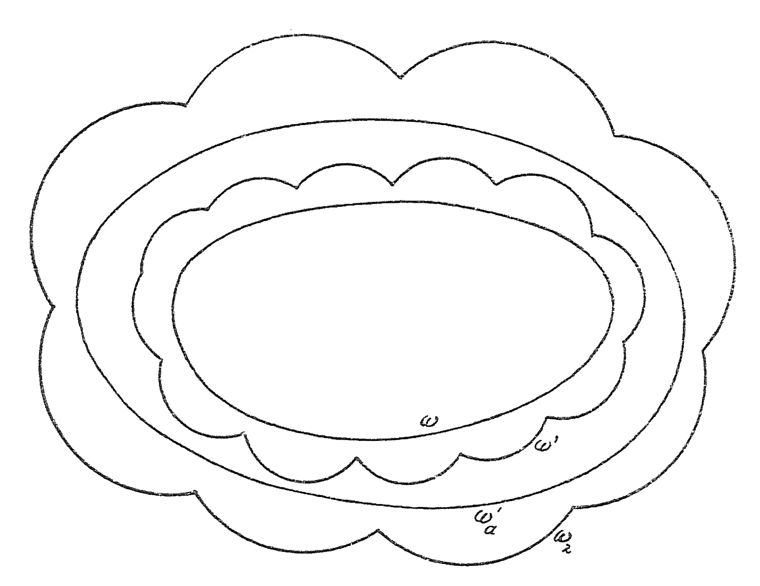


Fig. 81.

stehende, geschlossene Fläche ω' konstruieren und mittelst einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω' bestimmen, deren Randwerte an der Fläche ω' mit den Werten irgend einer all-

gemeinen Potentialfunktion des von ω und ω_2 begrenzten Raumes auf der Fläche ω' übereinstimmen.

Infolge dieser Überlegung und des Resultates des vorigen Paragraphen ergiebt sich, dass alle Voraussetzungen des Satzes Xf) (Typus 6 der Schwarzschen Methoden) erfüllt sind, und wir gelangen zu dem Endresullat:

XIIIa) Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_a' eine beliebige, ω beliebig nahe gelegene, geschlossene Fläche von solcher Beschaffenheit, dass ω ganz innerhalb von ω_a' verläuft, so kann man mit Hilfe der Neumanschen Methode und einer **endlichen** Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω konstruieren, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn man eine mit ihren ersten Ableitungen eindeutige und stetige und mit ihren zweiten Ableitungen endliche Funktion F des Innenraumes von $\omega\,\omega_a'$ kennt, welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt.

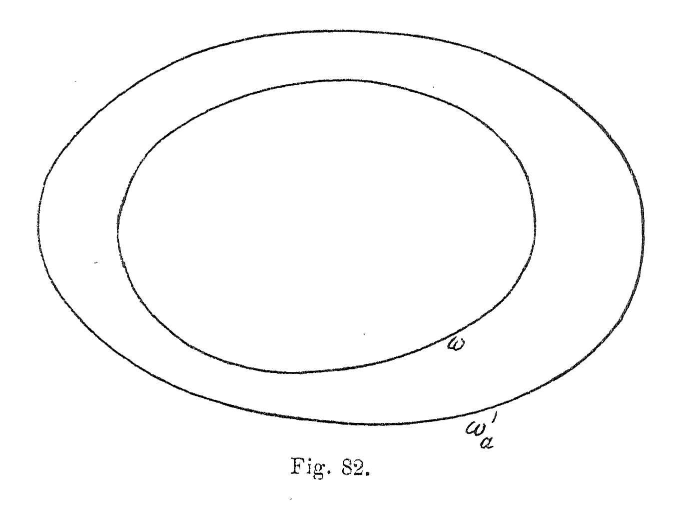


Fig. 82.

XIIIb) Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_a' eine beliebige, ω beliebig nahe gelegene, geschlossene Fläche von solcher Beschaffenheit, dass ω ganz innerhalb ω_a' verläuft, so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer **endlichen** Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω kon-

struieren, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn man eine Funktion F des Innenraumes von $\omega\,\omega_a'$ kennt, die folgenden Bedingungen genügt:

F soll in dem Innenraume von $\omega\,\omega_a'$ eindeutig und stetig sein und an der Fläche ω die Randwerte f haben, deren erste Ableitungen auf ω regulär sind; die ersten Ableitungen von F sollen in endlicher Entfernung von ω eindeutig und stetig sein und bei genügender Annäherung*) an die Fläche ω den Relationen:

$$\varrho \frac{\partial F}{\partial h} = \varDelta(\varrho)$$

genügen, wo h eine beliebige Richtung bezeichnet, und es soll schliefslich das über eine beliebig in dem Innenraume von $\omega\,\omega_a'$ konstruierte, geschlossene Oberfläche Ω zu erstreckende Integral:

$$\int_{\Omega} F \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Oberfläche Ω eindeutige und stetige normale Ableitungen haben.

XIIIc) Ist ω eine stetig gekrümmte, geschlossene Fläche, ω_a' eine beliebige, ω beliebig nahe gelegene, geschlossene Fläche von solcher Beschaffenheit, dass ω ganz innerhalb ω_a' verläuft, so kann man mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer endlichen Anzahl Schwarzscher Operationen die stetige, allgemeine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω konstruieren, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, wenn man eine Potentialfunktion F des Innenraumes von $\omega\,\omega_a'$ kennt welche an der Fläche ω die Randwerte f besitzt, deren erste Ableitungen auf ω regulär sind.

Es ist leicht, die Sätze XII und XIII auf beliebige, geschlossene Flächen ω und auf den Fall auszudehnen, dass die Randwerte f auf ω nur abteilungsweise eindeutig und stetig sind, doch würde dies bereits den Rahmen der in der theoretischen Physik vorkommenden Aufgaben überschreiten.

---

*) Auf einer Fläche, welche ω unter von null verschiedenen Winkeln schneidet.

V. Teil.

Theorie der Potentialfunktionen.

(Fortsetzung.)

I. Abschnitt.

Lösung elektrostatischer Probleme.

1. Kapitel.

Die Grenzfläche ω ist gegen einen inneren Punkt konvex.

§ 1.

Wir beschäftigen uns von nun an wieder, wie im III. Teile, lediglich mit stetig gekrümmten, geschlossenen Flächen ω und machen zunächst die Voraussetzung, dass die Fläche ω gegen einen inneren Punkt konvex ist.

Wir suchen die Potentialfunktion des Innen- resp. Aufsenraumes der Fläche ω, welche an der Fläche ω die gegebenen Randwerte f besitzt, und wir wollen zeigen, dass wir diese Potentialfunktionen mit Hilfe der Neumannschen Methode konstruieren können, falls f auf ω mit seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite Ableitungen hat.

Wir können nach dem Zusatz 2 zu VIII des IV. Teiles in diesem Falle die stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die Werte f haben, mit Hilfe der Neumannschen Methode konstruieren; wir werden nun zeigen, dass bei den gemachten Voraussetzungen

diese Funktionen auch Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes sind, dass also auch die ersten Ableitungen derselben bei unendlicher Annäherung an die Fläche ω stetig bleiben.

§ 2.

Wir nehmen wieder die Bezeichnungen S. 248 ff. auf und setzen:

$$1)\quad \begin{cases} \mathfrak{W}_0 = 0, \\ \mathfrak{W}_1 = -\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega f\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \\ \mathfrak{W}_j = +\dfrac{1}{4\pi}\displaystyle\int_\omega (\mathfrak{W}_{j-1\,a} + \mathfrak{W}_{j-1\,i})\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega, \quad (j = 2,\ 3\ \ldots); \end{cases}$$

$$2)\quad \begin{cases} W_{ja} = \mathfrak{W}_{j+1} + \mathfrak{W}_j, \text{ im Aufsenraume}, & (j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots) \\ W_{ji} = \mathfrak{W}_{j+1} - \mathfrak{W}_j, \text{ im Innenraume}, & (j = 0,\ 1,\ 2\ \ldots) \end{cases}$$

dann stellen nach den Untersuchungen des IV. Teiles Abschnitt IV die Funktionen:

$$3)\quad \begin{cases} U_a = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_0^\infty{}^j\, W_{ja}, \text{ im Aufsenraume}, \\ U_i = \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_0^\infty{}^j\, (-1)^{j+1}\, W_{ji}, \text{ im Innenraume}, \end{cases}$$

die stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Aufsen- resp. Innenraumes dar, welche an der Fläche ω die Randwerte $f + C$ resp. f haben.

Wir werden zunächst zeigen, dass die normalen Ableitungen von U_a resp. U_i an der Fläche ω eindeutig und stetig sind(43), und wir werden uns bei diesem Beweise im wesentlichen auf die Formeln 116) S. 252:

$$4)\quad \begin{cases} W_{ja} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\,\frac{d\omega}{r}, \text{ im Aufsenraume}, \quad (j = 1,\ 2\ \ldots) \\ W_{ji} = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\,\frac{d\omega}{r}, \text{ im Innenraume}, \quad (j = 1,\ 2\ \ldots) \end{cases}$$

auf das gleichfalls im IV. Teile erhaltene Resultat, dass die $\mathfrak{W}_j$ im Innen- und Aufsenraum in der durch die Formel:

$$5)\ \text{abs.}\ \mathfrak{W}_j \leqq A \cdot \varDelta^j, \left(\begin{array}{l} A \text{ endliche Konstante,} \\ \varDelta \text{ echter Bruch} \end{array}\right)$$

gegebenen Weise mit wachsendem j zu null konvergieren, und schliefslich auf die Sätze 1 bis 5 in Anm. ([24]) stützen.

§ 3.

Es sei $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ irgend ein Punkt der Fläche ω, ν_0 seine innere Normale, dann ist:*)

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu_0} = + \frac{1}{2\pi} \int_\omega \cos(\nu\nu_0) \left\{ \frac{\partial f}{\partial \xi} \frac{\cos(rx)}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial \eta} \frac{\cos(ry)}{r^2} + \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{\cos(rz)}{r^2} \right\} d\omega$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial f}{\partial \nu_0} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

oder:**)

$$= - \frac{1}{2\pi} \int_\omega \left[\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\cos(\nu\nu_0) \frac{\partial f}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\cos(\nu\nu_0) \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial \zeta} \left(\cos(\nu\nu_0) \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right) \right] \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\partial f}{\partial \nu_0} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega.$$

Nach Satz 1 und 4b in Anm. ([24]) ist daher $\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu}$ bei unseren Voraussetzungen an der Fläche ω regulär, es besteht also für zwei Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$, deren Entfernung r_{12} genügend klein ist, eine Relation von der Form:

$$6_1)\ \text{abs.} \left[\left| \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu} \right|_2 - \left| \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu} \right|_1 \right] \leqq A_0\, r_{12}^{\,1-\lambda_1},\ \lambda_1 < 1$$

wo A_0 eine endliche Konstante vorstellt; wir notieren auch die Endlichkeit von $\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu}$ durch eine besondere Formel:

---

*) Vgl. Formel 59) S. 46.

**) Vgl. Formel 54) S. 42 resp. die Untersuchung S. 198, 199.

$$7_1)\ \text{abs.}\ \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu} \mathrel{\overline{\overline{<}}} A_1\,{}^{*}),$$

wo A_1 eine endliche Konstante vorstellt.

Es folgt nun aus 4) für $j = 1$:

$$\frac{\partial W_{1a}}{\partial \nu_0} = -\frac{1}{2\pi}\left|\int_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu}\,\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega\right|_a,$$

$$\frac{\partial W_{1i}}{\partial \nu_0} = -\frac{1}{2\pi}\left|\int_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu}\,\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega\right|_i,$$

somit, da nach 2):

$$\frac{\partial W_{1a}}{\partial \nu_0} + \frac{\partial W_{1i}}{\partial \nu_0} = 2\,\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu_0}$$

ist:

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu_0} = -\frac{1}{2\pi}\left|\int_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu}\,\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega\right|_{(\xi_0\eta_0\zeta_0)},$$

wenn wir durch $|\ |_{(\xi_0\eta_0\zeta_0)}$ andeuten, dass der Wert des Integrales rechts auf der Fläche selbst zu nehmen ist.

Aus der letzten Gleichung folgt mit Hilfe des Satzes 2a in Anm. ([24]):

$$6_2)\ \text{abs.}\left[\left|\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu}\right|_2 - \left|\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu}\right|_1\right] \mathrel{\overline{\overline{<}}} c^{**})\cdot A_1\, r_{12}^{\,1-\lambda'},\ (\lambda' < 1)$$

und analog([59]) Zusatz zu IVa) des I. Teiles (S. 72):

$$7_2)\ \text{abs}\ \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu} \mathrel{\overline{\overline{<}}} A_2 \mathrel{\overline{\overline{<}}} c^{**})\,A_1,$$

wo c eine lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängende endliche Konstante vorstellt.

---

*) $A_1 = \text{abs. Max.}\ \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu}$.

**) Wir haben in 6_2) und 7_2) statt c zunächst zwei andere von einander verschiedene, endliche Konstante zu denken und bezeichnen mit c die größere derselben.

In analoger Weise fortgehend ergiebt uns die Formel ($j = 2, 3 \ldots$):

$$8)\quad \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu_0} = -\frac{1}{2\pi}\left|\int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_{j-1}}{\partial \nu} \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega\right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)}$$

die Relationen ($j = 1, 2 \ldots$):

$$6)\quad \text{abs.} \left[\left|\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\right|_2 - \left|\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\right|_1\right] \overline{\overline{<}}\ c \cdot A_{j-1}\, r_{12}^{\,1-\lambda},\quad (\lambda < 1)$$

$$7)\quad \text{abs.} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \overline{\overline{<}}\ A_j{}^{*)}\ \overline{\overline{<}}\ c\, A_{j-1},$$

wenn wir noch mit λ die gröfsere der Gröfsen λ_1 und λ' bezeichnen.

§ 4.

Wir denken uns auf der Normalen ν_0 in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ einen Punkt $(\xi' \eta' \zeta')$ in der Entfernung r von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$, dann ist identisch:

$$9)\quad \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0} \equiv \left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right|_{(\xi' \eta' \zeta')} - \left\{\left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right|_{(\xi' \eta' \zeta')} - \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right\}.$$

Wir verstehen dabei unter $\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}$, wenn wir diesen Ausdruck ohne weiteren Zusatz gebrauchen, den Wert der normalen Ableitung von W_{ji} an der inneren Seite der Fläche ω.

In dem ersten Summanden rechts setzen wir für W_{ji} den Wert:

$$W_{ji} \equiv \mathfrak{W}_{j+1\,i} - \mathfrak{W}_{ji} \equiv \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{(\mathfrak{W}_{ja} + \mathfrak{W}_{ji}) \cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

$$- \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{(\mathfrak{W}_{j-1a} + \mathfrak{W}_{j-1i}) \cos(r\nu)}{r^2} d\omega,\quad (j = 2, 3 \ldots),$$

(für $j = 1$ ist in dem zweiten Integrale $(-2f)$ statt $(\mathfrak{W}_{j-1a} + \mathfrak{W}_{j-1i})$ zu setzen), dann folgt aus dem Hilfssatz in Anm. (23) bei genügend kleinem r:

---

*) $A_j = \text{abs. Max.} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}$.

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} \overline{\overline{<}} \frac{\gamma}{4\pi r}\left[\text{abs. Max.}\,(\mathfrak{W}_{ja}+\mathfrak{W}_{ji}) + \text{abs.}^{*)}\,\text{Max.}\,(\mathfrak{W}_{j-1a}+\mathfrak{W}_{j-1i})\right],$$

wo γ eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Konstante ist, oder nach 5):

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} \overline{\overline{<}} \frac{\varDelta'}{r}\cdot \varDelta^{j-1},\ j=1,\ 2\ \ldots$$

wo $\varDelta'$ eine endliche Konstante, $\varDelta$ derselbe echte Bruch, wie in 5) ist.

Der zweite Summand rechts in 9) lässt sich folgendermaßen schreiben:

$$\left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} - \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0} \equiv \int\limits_0^r \left|\frac{\partial^2 W_{ji}}{\partial \nu_0^{\,2}}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} dr.$$

Nun ist $(j=1,\ 2\ \ldots)$:

$$W_{ji} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\,\frac{d\omega}{r},$$

wobei $\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}$ den Bedingungen 6) und 7) genügt; es folgt daher aus Satz 3a in Anm.(24) bei genügend kleinem r $(j=1,\ 2\ \ldots)$:

$$\text{abs.}\left|\frac{\partial^2 W_{ji}}{\partial \nu_0^{\,2}}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} \overline{\overline{<}}\ \alpha\cdot A_{j-1}\,r^{-\lambda''},\ (\lambda''<1),$$

wo α eine endliche Konstante vorstellt, somit $(j=1,\ 2\ \ldots)$:

$$10)\ \text{abs.}\left[\left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right|_{(\xi'\eta'\zeta')} - \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right] \overline{\overline{<}}\ \alpha'\,A_{j-1}\,r^{1-\lambda''},\ (\lambda''<1)$$

und $(j=1,\ 2\ \ldots)$:

$$11)\ \text{abs.}\left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0}\right| \overline{\overline{<}}\ \alpha'\,A_{j-1}\,r^{1-\lambda''} + \frac{\varDelta'}{r}\,\varDelta^{j-1},$$

wo α' wiederum eine endliche Konstante vorstellt; r ist dabei eine ganz beliebig gewählte Länge, die nur unterhalb einer endlichen Grenze zu liegen braucht, und α', $\varDelta'$, sowie die echten Brüche λ'', $\varDelta$ sind von j und r ganz unabhängig.

*) Für $j=2,\ 3\ \ldots$; für $j=1$ ist statt dessen 2 abs. Max. f zu setzen.

Wir setzen:

$$12)\quad r = \beta\,^{*)}\, \Delta^{\frac{j-1}{2-\lambda''}}$$

und:

$$13)\quad \Delta^{\frac{1-\lambda''}{2-\lambda''}} = \Delta',$$

dann folgt aus 11):

$$14a)\quad \text{abs.} \left| \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} \right| \overline{\overline{<}} (a + b\, A_{j-1})\, \Delta'^{j-1},\; j = 1, 2 \ldots$$

wo a und b endliche Konstanten sind. Es ergiebt sich völlig analog:

$$14b)\quad \text{abs.} \left| \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} \right| \overline{\overline{<}} (a + b\, A_{j-1})\, \Delta'^{j-1},\; j = 1, 2 \ldots$$

somit nach Formel 122) S. 254:

$$\text{abs.}\, \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \overline{\overline{<}} (a + b\, A_{j-1})\, \Delta'^{j-1},\; j = 1, 2 \ldots$$

oder auch:

$$15)\quad A_j \overline{\overline{<}} (a + b\, A_{j-1})\, \Delta'^{j-1},\; j = 1, 2 \ldots$$

Die rechte Seite kann dadurch, dass wir A_{j-1} hinzuaddieren, nur vergröfsert werden, und wir können dann 15) auch so schreiben:

$$A_j + \frac{a}{b} \overline{\overline{<}} \left(A_{j-1} + \frac{a}{b}\right)(1 + b\, \Delta'^{j-1}),$$

somit:

$$A_j + \frac{a}{b} \overline{\overline{<}} \left(A_0 + \frac{a}{b}\right)(1 + b)(1 + b\, \Delta')(1 + b\, \Delta'^2) \ldots (1 + b\, \Delta'^{j-1}),$$
$$(j = 1, 2 \ldots).$$

Das Produkt:

$$16)\quad Q = (1 + b)(1 + b\, \Delta')(1 + b\, \Delta'^2) \ldots (1 + b\, \Delta'^{j-1})(1 + b\, \Delta'^j) \ldots$$

ist konvergent, da $\Delta' < 1$, und es folgt:

$$17)\quad A_j + \frac{a}{b} \overline{\overline{<}} \left(A_0 + \frac{a}{b}\right) Q,\; j = 1, 2 \ldots$$

---

*) Wo β eine genügend kleine endliche Konstante ist.

so dass jedes A_j unter einer bestimmten endlichen Grenze bleibt; infolgedessen ergeben nun die Ungleichungen 14a), 14b) das Resultat:

$$18)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs.} \left|\frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu}\right| \overline{\overline{<}}\, c \cdot \varDelta'^{\,j-1}, \\ \text{abs.} \left|\frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu}\right| \overline{\overline{<}}\, c \cdot \varDelta'^{\,j-1}, \\ \text{abs.} \left|\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\right| \overline{\overline{<}}\, c \cdot \varDelta'^{\,j-1}, \end{array}\right| \quad j = 1, 2 \ldots$$

wo c eine endliche Konstante und $\varDelta'$ einen echten Bruch vorstellt.

Es zeigt sich, dass die Reihen:

$$19)\quad \left\{\begin{array}{l} H_a = \frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu} + \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu} + \cdots\right), \\ H_i = -\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu} - \frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial \nu} + \cdots\right), \end{array}\right.$$

ebenso, wie die Reihen:

$$20)\quad \left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U_a}{\partial \nu} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{1a}}{\partial \nu} + \frac{\partial W_{2a}}{\partial \nu} + \cdots\right), \\ \frac{\partial U_i}{\partial \nu} = -\frac{1}{2}\left(\frac{\partial W_{1i}}{\partial \nu} - \frac{\partial W_{2i}}{\partial \nu} + \cdots\right), \end{array}\right.$$

in der durch 18) gegebenen Art konvergieren.

Damit ist bewiesen, dass bei unseren Voraussetzungen die normalen Ableitungen von U_a und U_i an der Fläche ω nicht blofs endlich, sondern auch eindeutig und stetig sind.

Es ist ferner bewiesen, dass:

$$21)\quad \left\{\begin{array}{l} U_a = \int\limits_{\omega} H_a \frac{d\omega}{r}, \\ U_i = \int\limits_{\omega} H_i \frac{d\omega}{r}, \end{array}\right.$$

wo H_a und H_i eindeutige und stetige Funktionen der Stelle auf ω sind, welche durch die konvergenten Reihen 19) dargestellt werden.

§ 5.

Es sei wieder $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ irgend ein Punkt der Fläche ω, ν_0 seine innere Normale, dann ist in demselben

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu_0} = -\frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\omega} \frac{\partial \mathfrak{W}_{j-1}}{\partial \nu_0} \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega \right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)}, \quad j = 2, 3 \ldots$$

somit nach 19):

$$22) \left\{ \begin{aligned} H_a(\xi_0 \eta_0 \zeta_0) &= \frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu_0} - 2 \left| \int\limits_{\omega} H_a \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega \right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)}\right], \\ H_i(\xi_0 \eta_0 \zeta_0) &= -\frac{1}{4\pi}\left[\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu_0} - 2 \left| \int\limits_{\omega} H_i \frac{\cos(r\nu_0)}{r^2} d\omega \right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)}\right]. \end{aligned} \right.$$

Die Formeln 22) beweisen, da $\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial \nu_0}$ auf ω regulär ist, mit Hilfe des Satzes 2a in Anm. (24), dass die Funktionen H_a H_i auf ω regulär sind, daraus folgt nach 21) und Erweiterung des Satzes Vb) in Anm. (24), dass die ersten Ableitungen von U_a und U_i auch bei unendlicher Annäherung an ω eindeutig und stetig, d. h. dass U_a und U_i Potentialfunktionen sind.

I. Die durch die Neumannsche Methode erhaltenen Funktionen des Innen- resp. Aufsenraumes einer stetig gekrümmten, geschlossenen, gegen einen inneren Punkt konvexen Fläche ω, welche an derselben die Randwerte f annehmen, sind Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes, falls f auf ω mit seinen ersten Ableitungen eindeutig und stetig ist und endliche zweite*) Ableitungen hat.

---

*) Die Voraussetzung über die zweiten Ableitungen kann bereits nach dem obigen Beweise fortbleiben, wenn:

$$\frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

und die ersten Ableitungen von f an der Fläche ω regulär sind. Man kann aber, wie leicht (61) zu zeigen ist, mit der Regularität der ersten Ableitungen von f allein auskommen.

2. Kapitel.

Die Grenzfläche ω ist eine beliebige, stetig gekrümmte, geschlossene Fläche.

§ 1.

Die Sätze XII und XIII des IV. Teiles haben uns Bedingungen über die Randwerte f gegeben, unter denen wir mit Hilfe der Neumannschen Methode und einer endlichen Zahl Schwarzscher Operationen die stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- und Aufsenraumes der stetig gekrümmten, geschlossenen Fläche ω konstruieren können, welchen jene Randwerte f an der Fläche ω zukommen. Betrachten wir die so konstruierte, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes U_i — die Untersuchung für die allgemeine Potentialfunktion U_a des Aufsenraumes ist genau analog — in der Nähe eines Punktes $(\xi_0\ \eta_0\ \zeta_0)$ der Fläche ω, so können wir dieselbe, wenn wir um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ als Centrum eine Kugel mit einem genügend kleinen Radius schlagen, deren im Innenraum von ω gelegenen Teil wir ω_1 nennen, während wir den im Innenraum der Kugel gelegenen Teil von ω mit ω_2 bezeichnen, nach den Untersuchungen des

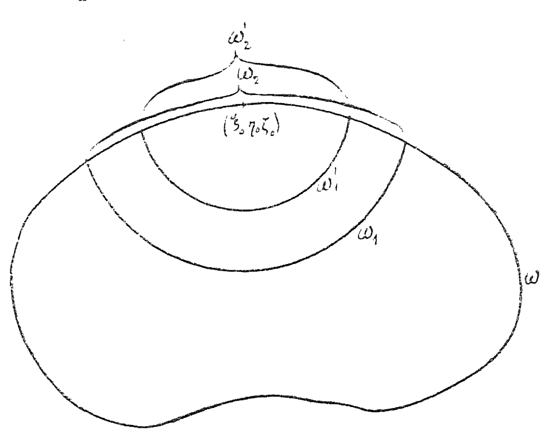


Fig. 83.

IV. Teiles als eine stetige, allgemeine Potentialfunktion des Innenraumes von $\omega_1\ \omega_2$ auffassen, deren Randwerte den Voraussetzungen des Zusatzes zu Xb) (S. 319) des IV. Teiles genügen, Diese Funktion setzt sich nach dem Beweise des ebengenannten Satzes zusammen aus einer allgemeinen Potentialfunktion u′ des Innenraumes der Kugel und einer mit Hilfe der Neumannschen Methode konstruierbaren, allgemeinen Potentialfunktion u des Innenraumes einer stetig gekrümmten, geschlossenen, gegen einen inneren Punkt konvexen Fläche Ω, als deren Teil ω_2 zu betrachten ist,*) und die Randwerte dieser letzten Funktion u an der Fläche Ω sind an dem Teile ω_2 und an einem endlichen Stücke über ω_2 hinaus f — u′ resp. f und an dem übrig bleibenden Stück von Ω etwa gleich einer endlichen Konstanten α.

---

*) Und zwar soll noch ein endliches Stück der Fläche ω über ω_2 hinaus der Fläche Ω angehören.

Da die Ableitungen von u' in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ endlich sind, ist es zur Untersuchung der Endlichkeit von $\frac{\partial U_i}{\partial \nu_0}$ nur notwendig, die Ableitung $\frac{\partial u}{\partial \nu_0}$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zu untersuchen. Wir denken uns für die Fläche Ω bei den Randwerten

$f - u'$ an dem Teile ω_2,
f an dem endlichen Stücke über ω_2 hinaus,
α an dem übrigen Teile von Ω

die Funktionen $\mathfrak{W}_j$ (also auch W_{ja} W_{ji}) der Neumannschen Reihe gebildet, dann ist jedes $\mathfrak{W}_j$ und W_{ji} eine reguläre, allgemeine Potentialfunktion sowohl des Innenraumes von Ω, als auch z. B. des Innenraumes von $\omega_1' \omega_2'$, der von der Fläche ω und einer Kugelkalotte ω_1' um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ als Centrum begrenzt ist, deren Radius R_j kleiner ist als der von ω_1, sodass nach der Verallgemeinerung des Zusatzes zu I a) bis I d) im IV. Teile (S. 285):

$$0 = \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega - \omega_2' + \omega_1'} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\Omega - \omega_2' + \omega_1'} \mathfrak{W}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \text{ (im Innenraume von } \omega_1' \omega_2'),$$

wenn wir mit ν die inneren Normalen des von den Flächen $\Omega - \omega_2'$ und ω_1' begrenzten Raumes bezeichnen, oder:

$$23)\quad \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega - \omega_2'} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega_1'} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\Omega - \omega_2' + \omega_1'} \mathfrak{W}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega,$$

(im Innenraume von $\omega_1' \omega_2'$),

so dass:

$$24\text{a})\quad W_{ji} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega_1' + \omega_2'} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{\Omega - \omega_2'} \mathfrak{W}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \int\limits_{\omega_1'} \mathfrak{W}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right],$$

(im Innenraume von $\omega_1' \omega_2'$),

wenn wir jetzt mit ν die inneren Normalen von $\Omega - \omega_2'$ und die in den Innenraum von $\omega_1' \omega_2'$ hineingehenden Normalen von ω_1' und ω_2' bezeichnen.

Analog ist:

$$24\text{b})\quad W_{ja} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega_1' + \omega_2'} \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{2\pi} \left[\int\limits_{\Omega - \omega_2'} \mathfrak{W}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \int\limits_{\omega_1'} \mathfrak{W}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \right],$$

(im Aufsenraume von Ω),

und es folgt aus 24a), 24b):

$$
25)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \mathfrak{W}_{j+1}}{\partial \nu_0'} \equiv \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} + \dfrac{\partial W_{ja}}{\partial \nu_0'}\right), \\[2ex] = -\dfrac{1}{2\pi}\left|\displaystyle\int_{\omega_1'+\omega_2'} \dfrac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu}\,\dfrac{\cos(r\nu_0')}{r^2}\,d\omega\right|_{(\xi_0'\eta_0'\zeta_0')} \\[2ex] + \dfrac{1}{2\pi}\,\dfrac{\partial}{\partial \nu_0'}\left[\displaystyle\int_{\Omega-\omega_2'} \mathfrak{W}_j\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega - \int_{\omega_1'} \mathfrak{W}_j\,\dfrac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega\right] \end{cases}
$$

für irgend einen Punkt $(\xi_0'\eta_0'\zeta_0')$ des Flächenstückes ω_2'. Man kann nun durch eine der Betrachtung in Kapitel 1 analoge Untersuchung, bei der die Formeln 24) und 25) an die Stelle der früheren Formeln 4) und 8) treten, zeigen*), dass die absoluten Maxima $\dfrac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu_0}$ an der Fläche ω_2', die ich wieder mit A_j bezeichnen will, bei geeigneter Festsetzung über die Radien R_j einer Relation von der Form genügen:

$$
26)\quad A_j \overline{\overline{<}} (a + b\,A_{j-1})\,\Delta^{j-1},\ j = 1,\ 2\ \ldots
$$

wo a und b endliche Konstanten vorstellen und Δ ein echter Bruch ist, und hieraus wieder:

$$
27)\quad \text{abs.}\ \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu_0'} \overline{\overline{<}}\ c\cdot\Delta^{j-1},
$$

$$
28)\quad \begin{cases} \text{abs.}\ \dfrac{\partial W_{ja}}{\partial \nu_0'} \overline{\overline{<}}\ c\cdot\Delta^{j-1}, \\[2ex] \text{abs.}\ \dfrac{\partial W_{ji}}{\partial \nu_0'} \overline{\overline{<}}\ c\cdot\Delta^{j-1}, \end{cases} \quad \text{an der Fläche } \omega_2'
$$

(c endliche Konstante), falls die Voraussetzungen des Satzes XIIa) des IV. Teiles erfüllt sind.

Mit Hilfe der Formeln 27) und 28) folgt dann, wie in Kapitel 1, dass die ersten Ableitungen von u, somit auch von U_i bei unendlicher Annäherung an den Punkt $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ stetig sind, d. h. dass U_i eine Potentialfunktion des Innenraumes von ω ist, da wir den Punkt $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ beliebig auf ω gewählt haben.

§ 2.

Wir sprechen die in § 1 erhaltenen Resultate in dem folgenden Satze aus[61]:

II. Die bei den Voraussetzungen der Sätze XII und XIII des IV. Teiles mittelst der Neumannschen Methode und einer

---

*) Die Untersuchung dieses 2. Kapitels möge lediglich als eine Exposition des allgemeinen Beweises gelten, der ausführliche Beweis wird Gegenstand einer besonderen Abhandlung sein.

endlichen Zahl Schwarzscher Operationen konstruierbaren stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω sind zugleich Potentialfunktionen eben dieser Gebiete.

II. Abschnitt.

Lösung hydrodynamischer Probleme für den Innen- und Aufsenraum einer geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω.

---

1. Kapitel.

Die Neumann-Robinsche Methode des arithmetischen Mittels.

(Die Fläche ω ist gegen einen inneren Punkt konvex.)

§ 1.

Wir beschränken uns in diesem Kapitel wieder auf den Fall, dass die Fläche ω gegen einen inneren Punkt konvex ist und wollen den folgenden Satz beweisen.

III. Es sei ω irgend eine geschlossene, stetig gekrümmte, gegen einen inneren Punkt konvexe Fläche und f eine Funktion der Stelle auf derselben, welche die folgenden Bedingungen erfüllt:

Es soll f auf ω eindeutig und stetig, seine ersten Ableitungen auf ω regulär*) und

$$29) \quad \int_{\omega} f d\omega = 0$$

sein.

Man bilde successive die Funktionen:

---

*) Es ist leicht(62) zu übersehen, dass bereits die Endlichkeit der ersten Ableitungen von f für die Gültigkeit dieses Satzes genügt.

$$30)\left\{\begin{aligned}
&\mathfrak{V}_0 = 0,\\
&\mathfrak{V}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \frac{f}{r}\, d\omega,\\
&\mathfrak{V}_2 = +\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \left\{\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_a + \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_i\right\}\frac{d\omega}{r},\\
&\mathfrak{V}_3 = +\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \left\{\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_a + \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_i\right\}\frac{d\omega}{r},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}\right.$$

dann stellen die Funktionen:

$$31)\left\{\begin{aligned}
&U_i = \sum_0^\infty{}_j\, \mathfrak{V}_j,\\
&U_a = \sum_0^\infty{}_j\, (-1)^j\, \mathfrak{V}_j
\end{aligned}\right.$$

die Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes von ω dar, welche an der Fläche ω die normalen Ableitungen:

$$32)\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial U_i}{\partial \nu} = f,\\
&\frac{\partial U_a}{\partial \nu} = f
\end{aligned}\right.$$

besitzen.

§ 2.

Zum Beweise dieses Satzes bemerken wir zunächst, dass nach den Formeln 30) infolge des Zusatzes zu V b) des I. Teiles (S. 73):

$$33)\left\{\begin{aligned}
&\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_a - \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_i = -2f,\\
&\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_a - \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_i = \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_a + \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_i,\\
&\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial \nu}\right|_a - \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_3}{\partial \nu}\right|_i = \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_a + \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_i,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right.$$

Können wir zeigen, dass:

$$\lim_{j=\infty}\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_a = \lim_{j=\infty}\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_i = 0,$$

so folgt aus 33) durch Addition und Division durch (-2):

$$\frac{\partial U_i}{\partial \nu} = f;$$

ebenso folgt aus 33) durch Addition, nachdem man die jte Formel mit $(-1)^j$ multipliziert hat, und Division durch $(+2)$:

$$\frac{\partial U_a}{\partial \nu} = f,$$

falls überhaupt die $\mathfrak{V}_j$ und ihre normalen Ableitungen an der Fläche ω Glieder von konvergenten Reihen sind.

Zu diesen Konvergenzbeweisen wollen wir zunächst übergehen.

Jedes $\mathfrak{V}_j$ ist, wie mit Hilfe des Satzes IV a) und der Erweiterung von V b) in Anm.(24) folgt, eine Potentialfunktion sowohl des Innen- als auch des Aufsenraumes, es gelten somit die Formeln $(j = 1, 2 \ldots)$:

$$34)\left\{\begin{aligned}\mathfrak{V}_j &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_a \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,\\ 0 &= \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_i \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,\end{aligned}\right\}\text{ im Aufsenraume,}$$

$$35)\left\{\begin{aligned}\mathfrak{V}_j &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_i \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,\\ 0 &= -\frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_a \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega,\end{aligned}\right\}\text{ im Innenraume,}$$

und die aus ihnen durch Addition folgenden $(j = 1, 2 \ldots)$:

$$36)\left\{\begin{aligned}\mathfrak{V}_{j+1} - \mathfrak{V}_j &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \text{ im Aufsenraume,}\\ \mathfrak{V}_{j+1} + \mathfrak{V}_j &= \frac{1}{2\pi}\int\limits_\omega \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \text{ im Innenraume,}\end{aligned}\right.$$

oder, falls wir $(j = 1, 2 \ldots)$

$$37) \begin{cases} V_{ja} = \mathfrak{V}_j - \mathfrak{V}_{j-1}, \text{ im Aufsenraume,} \\ V_{ji} = \mathfrak{V}_j + \mathfrak{V}_{j-1}, \text{ im Innenraume} \end{cases}$$

setzen $(j = 1, 2 \ldots)$:

$$38) \begin{cases} V_{j+1a} = + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega, \\ V_{j+1i} = + \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} \mathfrak{V}_j \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega. \end{cases}$$

Nun ist nach 37) $(j = 1, 2 \ldots)$:

$$39) \quad \mathfrak{V}_j = \frac{1}{2} (V_{ja} + V_{ji}), \text{ an der Fläche } \omega,$$

somit $(j = 1, 2 \ldots)$ im Aufsen- und Innenraume:

$$40) \quad V_{j+1} = + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} (V_{ja} + V_{ji}) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega.$$

Diese Gleichung macht uns mit einem Schlage mit dem Verhalten der Funktionen V_j bekannt, sie zeigt, dass dieselben mit den Gliedern $\mathfrak{W}_{j-1}$ einer Neumannschen Reihe übereinstimmen, die den Randwerten:

$$-\frac{1}{2} (V_{1a} + V_{1i}),$$

also den Randwerten:

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} \frac{f}{r} d\omega$$

zugehören.

Es werden somit die

$$V_j \text{ und } \frac{\partial V_j}{\partial \nu}$$

mit beliebigen Vorzeichen genommen, desgleichen*) die

$$\mathfrak{V}_j \text{ und } \frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}$$

*) Vgl. § 3.

Glieder von konvergenten Reihen und die Funktionen U_i U_a Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraumes sein, falls die Funktion:

$$V_1 \equiv \mathfrak{V}_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_{\omega}\frac{f}{r}\,d\omega$$

an der Fläche ω die Bedingungen erfüllt, welche im Satze I (Anm.) der Funktion f vorgeschrieben waren, dass die ersten Ableitungen von $\mathfrak{V}_1$ und die Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{\omega}\mathfrak{V}_1\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega$$

auf ω regulär sind. Nun sind nach Satz 4a in Anm. ([24]) die ersten Ableitungen von $\mathfrak{V}_1$ regulär, wenn die ersten Ableitungen von f regulär sind; andererseits ist für irgend einen Punkt $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ an der Aufsenseite von ω:

$$\frac{\partial}{\partial\nu_0}\int_{\omega}\mathfrak{V}_1\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = -\int_{\omega}\left|\frac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial\nu}\right|_i\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega,\ \text{(nach 34)}$$

an der Innenseite von ω:

$$\frac{\partial}{\partial\nu_0}\int_{\omega}\mathfrak{V}_1\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = -\int_{\omega}\left|\frac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial\nu}\right|_a\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega,\ \text{(nach 35)},$$

es folgt somit nach Satz 4a in Anm. ([24]) aus der Regularität von $\frac{\partial\mathfrak{V}_1}{\partial\nu}$ auch die Regularität von:

$$\frac{\partial}{\partial\nu}\int_{\omega}\mathfrak{V}_1\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega,$$

und damit ist unser Satz III vollständig bewiesen.

§ 3.

Aus dem vorstehenden Beweis geht noch nicht mit aller Deutlichkeit hervor, dass die Bedingung

$$41)\quad \int_{\omega} f\,d\omega = 0$$

eine notwendige Voraussetzung für die Gültigkeit des Satzes III ist. Man muss aber von dieser Voraussetzung Gebrauch machen,*) wenn man von der aus 40) folgenden Ungleichung:

$$42)\quad \text{abs.}\ \frac{\partial V_j}{\partial \nu} < c\, \varDelta'^{\,j-1}, \qquad \begin{array}{l} c \text{ endliche Konstante.} \\ \varDelta' \text{ echter Bruch,} \end{array}$$

zu den Ungleichungen:

$$43)\quad \begin{cases} \text{abs.} \left| \dfrac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu} \right|_a \leqq c_1 \varDelta'^{\,j-1}, & c_1\ c_2 \text{ endliche Konstanten,} \\ \text{abs.} \left| \dfrac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu} \right|_i \leqq c_2 \varDelta'^{\,j-1}, & \varDelta' \text{ echter Bruch,} \end{cases}$$

gelangen will.

Es folgt aus 42) zunächst nur, dass die Reihen:

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_0}{\partial \nu}\right|_a + \left[\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_a - \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_0}{\partial \nu}\right|_a\right] + \left[\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_a - \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_a\right] + \cdots = \lim_{j=\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_a,$$

$$\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_0}{\partial \nu}\right|_i - \left[\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_i + \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_0}{\partial \nu}\right|_i\right] + \left[\left|\frac{\partial \mathfrak{V}_2}{\partial \nu}\right|_i + \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu}\right|_i\right] - \cdots = \pm \lim_{j=\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_i$$

konvergieren, und dass:

$$44)\quad \lim_{j=\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_i = 0,$$

somit auch:

$$\text{abs.} \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_i \leqq c_2 \cdot \varDelta'^{\,j-1}, \quad \left(c_2 = \frac{c}{1-\varDelta'}\right).$$

Zur Ableitung der ersten Ungleichung 43) müssen wir aber erst beweisen, dass:

$$45)\quad \lim_{j=\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_a = 0$$

ist. Hierzu bemerken wir zunächst, dass:

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{V}_j = \frac{1}{4\pi} \int_\omega \lim_{j=\infty} \left|\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu}\right|_a \frac{d\omega}{r},$$

es folgt dann, wenn wir:

---

*) Vgl. Anm. S. 347.

$$\mathfrak{T}_{ji} = \int\limits_{\tau_i} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau,$$

$$\mathfrak{T}_{ja} = \int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau$$

setzen, aus 44):

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{T}_{ji} = 0,$$

somit:

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{V}_{ji} = \text{const., im Innenraume}$$

und auch:

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{V}_{ja} = \text{const., an der Fläche } \omega.$$

Hieraus folgt:

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{T}_{ja} = \lim_{j=\infty} \mathfrak{V}_{ja} \cdot \int\limits_{\omega} \lim_{j=\infty} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu} \right|_a d\omega$$

$$= 0,$$

falls:

$$\int\limits_{\omega} f \, d\omega = 0,$$

da in diesem Falle:

$$\int\limits_{\omega} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_1}{\partial \nu} \right|_a d\omega = 0, \ \ldots$$

und somit auch:

$$\int\limits_{\omega} \lim_{j=\infty} \left| \frac{\partial \mathfrak{V}_j}{\partial \nu} \right|_a d\omega = 0$$

ist.

Aus

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{T}_{ja} = 0$$

folgt nun auch die Gleichung 45) und aus dieser die erste Ungleichung 43); es ist also thatsächlich die Bedingung:

$$\int\limits_{\omega} f \, d\omega = 0$$

für die Gültigkeit des Satzes III notwendig.

Ist nun diese Bedingung nicht erfüllt, so wird natürlich die Konstruktion der entsprechenden Potentialfunktion U_i unmöglich sein, man kann aber die Potentialfunktion $\overline{U}_a$ des Aufsenraumes konstruieren, welche die normalen Ableitungen f an der Fläche ω besitzt. Wir bezeichnen wieder mit O den inneren Punkt, gegen den die Fläche konvex ist, und mit $\Re$ den Radiusvektor nach irgend einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche ω.

Wir können dann mit Hilfe des Satzes III die Potentialfunktion U_a des Aufsenraumes konstruieren, die an der Fläche ω die normalen Ableitungen:

$$46)\quad \frac{\partial U_a}{\partial \nu} = f + \int_\omega f\, d\omega \cdot \frac{1}{4\pi}\, \frac{\cos(\Re\nu)}{\Re^2}$$

besitzt, dann ist thatsächlich:

$$\int_\omega \frac{\partial U_a}{\partial \nu}\, d\omega = 0;$$

die Potentialfunktion:

$$47)\quad \overline{U}_a = U_a - \frac{1}{4\pi r_1}\int_\omega f\, d\omega,$$

in der r_1 die Entfernung des variabeln Punktes von O vorstellt, hat dann an der Fläche ω die normalen Ableitungen:

$$48)\quad \frac{\partial \overline{U}_a}{\partial \nu} = f.$$

Zusatz zu III. Besteht die Bedingung:

$$\int_\omega f\, d\omega = 0$$

nicht, so existiert keine Potentialfunktion U_i, welche die normalen Ableitungen f an der Fläche ω besitzt, zur Konstruktion der Potentialfunktion $\overline{U}_a$ des Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die normalen Ableitungen f besitzt, konstruiere man nach Satz III die Potentialfunktion U_a des Aufsenraumes, welche an der Fläche ω die normalen Ableitungen:

$$f - \int_\omega f\, d\omega \, \frac{1}{4\pi} \, \frac{\cos(\mathfrak{R}\nu)}{\mathfrak{R}^2}$$

besitzt, wenn man unter $\mathfrak{R}$ den Radiusvektor von dem Punkte O, gegen den die Fläche ω konvex ist, nach irgend einem Punkte $(\xi\eta\zeta)$ der Fläche versteht; dann ist:

$$\overline{U}_a = U_a - \frac{1}{4\pi r_1} \int_\omega f\, d\omega,$$

wenn r_1 die Entfernung des variabeln Punktes von O vorstellt.

2. Kapitel.

Eine allgemeine Betrachtung für beliebige, geschlossene, stetig gekrümmte Flächen ω.

§ 1.

Sei ω eine beliebige geschlossene, stetig gekrümmte Fläche und wir suchen die Potentialfunktion U_i des Innenraumes, welche an der Fläche ω die normalen Ableitungen f hat.

Wir nehmen an, es sei

$$49)\quad \int_\omega f d\omega = 0,$$

und wir kennen eine Funktion $\varkappa_a$ der Stelle auf ω von solcher Beschaffenheit, dass das Flächenintegral:

$$50)\quad W = \int_\omega \varkappa_a \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

an der Aufsenseite der Fläche ω die Werte:

$$51)\quad W_a = \int_\omega f \frac{d\omega}{r}$$

hat. Es ist dann:

$$52)\quad U_i = -\frac{1}{4\pi} \int_\omega f \frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi} W$$

die gesuchte Potentialfunktion, wenn f auf ω regulär, $\varkappa_a$ auf ω eindeutig und stetig ist und reguläre erste Ableitungen hat.

Denn es folgt aus 51), dass im ganzen Aufsenraume:

$$W = \int_{\omega} f \frac{d\omega}{r},$$

somit auch an der Fläche ω:

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} f \frac{d\omega}{r} \right|_a$$

$$= + 4\pi f + \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} f \frac{d\omega}{r} \right|_i$$

sein muss; daraus folgt aber unmittelbar:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \left[\frac{1}{4\pi} W - \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} f \frac{d\omega}{r} \right] \right|_i = f.$$

§ 2.

Es handle sich nun darum, die Potentialfunktion U_a des Aufsenraumes zu bestimmen, welche an der Fläche ω die normalen Ableitungen f hat.

Wir nehmen an, wir kennen eine Funktion $\varkappa_i$ der Stelle auf ω von solcher Beschaffenheit, dass das Flächenintegral:

$$53) \quad W = \int_{\omega} \varkappa_i \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

an der Innenseite der Fläche ω die Werte:

$$54) \quad W_i = \int_{\omega} f \frac{d\omega}{r}$$

hat. Es ist dann:

$$55) \quad U_a = + \frac{1}{4\pi} \int_{\omega} f \frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi} W$$

die gesuchte Potentialfunktion, wenn f auf ω regulär, $\varkappa_i$ auf ω eindeutig und stetig ist und reguläre erste Ableitungen hat.

Denn es folgt aus 54), dass im ganzen Innenraume:

$$W = \int\limits_{\omega} f \frac{d\omega}{r},$$

somit auch an der Fläche ω:

$$\frac{\partial W}{\partial \nu} = \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\omega} f \frac{d\omega}{r} \right|_i ,$$

$$= -4\pi f + \left| \frac{\partial}{\partial \nu} \int\limits_{\omega} f \frac{d\omega}{r} \right|_a$$

sein muss; daraus folgt aber unmittelbar:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \nu} \left[-\frac{1}{4\pi} W + \frac{1}{4\pi} \int\limits_{\omega} f \frac{d\omega}{r} \right] \right|_a = f.$$

Der Fall:

$$\int\limits_{\omega} f\, d\omega \neq 0$$

erledigt sich in genau analoger Weise, wie im 1. Kapitel § 3.

Wenn das hydrodynamische Problem für beliebige geschlossene, stetig gekrümmte Flächen durch die Betrachtung dieses Kapitels in einer ausgedehnten Reihe von Fällen seine Lösung findet, so scheinen doch einer Lösung von gleicher Allgemeinheit, wie die des elektrostatischen Problemes, noch grofse Schwierigkeiten im Wege zu stehen.

III. Abschnitt.

Probleme für den Innen- und Aufsenraum von Flächen, die aus mehreren getrennten Teilen bestehen.

(Die Methoden von Murphy.)

---

1. Kapitel.

Das äufsere Murphysche Problem.

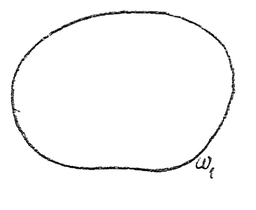
§ 1.

Wir haben uns bisher mit der Lösung von Problemen beschäftigt, in denen die geschlossenen Flächen ω zusammenhängend

sind, d. h. von solcher Beschaffenheit, dass man von jedem Punkte der Fläche in stetiger Weise auf derselben fortschreitend zu jedem anderen Punkte der Fläche gelangen konnte. Obwohl man nun leicht auch mit Hilfe der früheren Methoden den Fall absolvieren kann, dass ω aus mehreren getrennten Teilen besteht, wollen wir hier auch die besondere Modifikation der Schwarzschen Methode betrachten, durch welche man in einfachster Weise zu der Lösung solcher Probleme gelangt, und zwar aus dem Grunde, weil gerade diese Methode, die lange vor den Schwarzschen Methoden zum erstenmale von Murphy angegeben wurde, in der theoretischen Physik aufserordentlich wichtige Anwendungen zulässt.

Wir stellen uns zunächst das folgende Problem:

Es sind zwei stetig gekrümmte, geschlossene Flächen ω_1 und ω_2 gegeben, die sich nicht umschliefsen und keinen Punkt gemein haben, wir suchen die Potentialfunktion des Aufsenraumes der beiden Flächen ω_1 und ω_2, welche an der Fläche ω_1 die gegebenen Randwerte f_1, an der Fläche ω_2 die gegebenen Randwerte f_2 annimmt, und wir werden den folgenden Satz beweisen:



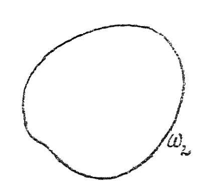


Fig. 84.

IVa) Es seien ω_1 und ω_2 zwei stetig gekrümmte, geschlossene Flächen, die sich nicht umschliefsen und keinen Punkt gemein haben, f_1 eine gegebene Funktion der Stelle auf der Fläche ω_1, von solcher Beschaffenheit, dass die Existenz der Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_1, die an der Fläche ω_1 die Randwerte f_1 hat, gesichert sei, f_2 eine gegebene Funktion der Stelle auf der Fläche ω_2, von solcher Beschaffenheit, dass die Existenz der Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_2, die an der Fläche ω_2 die Randwerte f_2 hat, gesichert sei; man berechne successive die Potentialfunktionen

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{des Außenraumes von } \omega_1 \\
U_{11} \text{ so, dass an der Fläche } \omega_1\text{: } U_{11} = f_1, \\
U_{12} \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; U_{12} = -U_{21}, \\
U_{13} \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; U_{13} = -U_{22}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{1j} \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; U_{1j} = -U_{2,j-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{des Außenraumes von } \omega_2 \\
U_{21} \text{ so, dass an der Fläche } \omega_2\text{: } U_{21} = f_2, \\
U_{22} \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; U_{22} = -U_{11}, \\
U_{23} \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; U_{23} = -U_{12}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{2j} \;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\;\text{"}\;\; U_{2j} = -U_{1,j-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad 56)
$$

dann stellt die Reihe:

$$57)\quad U = \sum_{1}^{\infty} {}^{j} (U_{1j} + U_{2j})$$

die Potentialfunktion des Aufsenraumes der beiden Flächen ω_1 und ω_2 vor, welche an der Fläche ω_1 die Werte f_1, an der Fläche ω_2 die Werte f_2 annimmt.

§ 2.

Können wir nachweisen, dass die Reihe 57) wirklich konvergiert, so folgt durch Addition der oberen Gruppe der Formeln 56):

$$U_{11} + U_{12} + \cdots = f_1 - U_{21} - U_{22} - \cdots \text{ (an der Fläche } \omega_1\text{)},$$

oder:

$$58\text{a})\quad U = f_1, \text{ (an der Fläche } \omega_1\text{)},$$

und durch Addition der unteren Gruppe der Formeln 56):

$$U_{21} + U_{22} + \cdots = f_2 - U_{11} - U_{12} - \cdots \text{ (an der Fläche } \omega_2\text{)},$$

oder:

$$58\text{b})\quad U = f_2, \text{ (an der Fläche } \omega_2\text{)};$$

wir haben also lediglich den Beweis zu erbringen, dass die Reihe 57) konvergiert und eine Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_1 und ω_2 ist.

Es ist nun U_{11} die Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_1, die an der Fläche ω_1 die Werte f_1 hat; bezeichnen wir mit Γ_1 den absolut gröfsten Wert von f_1 auf ω_1, so ist nach Zusatz zu Satz IX des IV. Teiles in Anm. (54):

$$\text{abs. } U_{11} \lesseqgtr \Gamma_1 \cdot \lambda_{12}, \text{ an der Fläche } \omega_2,$$

wo λ_{12} einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Lage der beiden Flächen $\omega_1\, \omega_2$ abhängt; analog ist:

$$\text{abs. } U_{21} \lesseqgtr \Gamma_2 \cdot \lambda_{21}, \text{ an der Fläche } \omega_1,$$

wenn Γ_2 den absolut gröfsten Wert von f_2 auf ω_2 und λ_{21} einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Lage der beiden Flächen $\omega_1\, \omega_2$ abhängt; bezeichnen wir die gröfseren der beiden Konstanten $\Gamma_1\, \Gamma_2$ mit Γ, so dass nach Zusatz 1 zu VII des III. Teiles:

$$59_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{11} \lesseqgtr \Gamma, \\ \text{abs. } U_{21} \lesseqgtr \Gamma, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\, \omega_2,$$

und den gröfseren der beiden echten Brüche $\lambda_1\, \lambda_2$ mit λ, so können wir die beiden obigen Formeln auch so schreiben:

$$\begin{array}{l} \text{abs. } U_{11} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda, \text{ an der Fläche } \omega_2, \\ \text{abs. } U_{21} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda, \text{ an der Fläche } \omega_1, \end{array}$$

somit auch:

$$\begin{array}{l} \text{abs. } U_{12} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda, \text{ an der Fläche } \omega_1, \\ \text{abs. } U_{22} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda, \text{ an der Fläche } \omega_2, \end{array}$$

und auch nach Zusatz 1 zu VII des III. Teiles:

$$59_2)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{12} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda, \\ \text{abs. } U_{22} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\, \omega_2.$$

Indem wir in dieser Weise weitergehen, folgt $(j = 1, 2 \ldots)$:

$$59)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{1j} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda^{j-1}, \\ \text{abs. } U_{2j} \lesseqgtr \Gamma \cdot \lambda^{j-1}, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\, \omega_2,$$

und hieraus die Konvergenz der Reihe 57).

Dass schliefslich die Reihe 57) auch eine Potentialfunktion darstellt, folgt am leichtesten, wenn man dieselbe auf eine andere Form — der Schwarzschen Methode entsprechend — bringt.

Man berechne successive die Potentialfunktionen

$$\left.\begin{array}{l}
\text{des Außenraumes von } \omega_1 \\
u_{11} \text{ so, dass an der Fläche } \omega_1 : u_{11} = f_1, \\
u_{12} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad u_{12} = f_1 - u_{21}, \\
u_{13} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad u_{13} = f_1 - u_{22}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{1j} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad u_{1j} = f_1 - u_{2,j-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{des Außenraumes von } \omega_2 \\
u_{21} \text{ so, dass an der Fläche } \omega_2 : u_{21} = f_2, \\
u_{22} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad u_{22} = f_2 - u_{11}, \\
u_{23} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad u_{23} = f_2 - u_{12}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
u_{2j} \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad " \quad u_{2j} = f_2 - u_{1,j-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad 60)$$

dann ist:

$$61) \begin{cases} U = u = & u_{11} + (u_{12} - u_{11}) + (u_{13} - u_{12}) + \cdots \\ & + u_{21} + (u_{22} - u_{21}) + (u_{23} - u_{22}) + \cdots, \\ = & \lim\limits_{n=\infty} (u_{1n} + u_{2n}), \end{cases}$$

denn es folgt durch Vergleichung der Formeln 56) und 60) mit Hilfe des Zusatzes 2 zu Satz VII des III. Teiles successive:

$$62) \begin{cases} U_{11} = u_{11}, & U_{21} = u_{21}, \\ U_{12} = u_{12} - u_{11}, & U_{22} = u_{22} - u_{21}, \\ U_{13} = u_{13} - u_{12}, & U_{23} = u_{23} - u_{22}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

aus 61) folgt aber, da u_{1n} u_{2n} Potentialfunktionen sind, die sich mit wachsendem n bestimmten Grenzwerten nähern, der Charakter von U als Potentialfunktion.

2. Kapitel.

Das innere Murphysche Problem.

§ 1.

Wir können analog den Untersuchungen des 1. Kapitels den folgenden Satz beweisen:

IVb) Es seien ω_1 und ω_2 zwei stetig gekrümmte, geschlossene Flächen, die sich umschliefsen und keinen Punkt gemein haben, f_1 eine gegebene Funktion der Stelle auf der Fläche ω_1, von solcher Beschaffenheit, dass die Existenz der Potentialfunktion des Aufsenraumes von ω_1, die an der Fläche ω_1 die Randwerte f_1 hat, gesichert sei, f_2 eine gegebene Funktion der Stelle auf der Fläche ω_2, von solcher Beschaffenheit, dass die Existenz der Potentialfunktion des Innenraumes von ω_2, die an der Fläche ω_2 die Randwerte f_2 hat, gesichert sei; man berechne successive die Potentialfunktionen

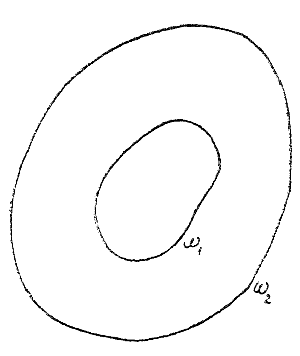


Fig. 85.

$$
\left.\begin{array}{l}
\text{des Aufsenraumes von } \omega_1 \\
U_{11} \text{ so, dass an der Fläche } \omega_1\text{: } U_{11} = f_1, \\
U_{12} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad U_{12} = -U_{21}, \\
U_{13} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad U_{13} = -U_{22}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{1j} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad U_{1j} = -U_{2,j-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\text{des Innenraumes von } \omega_2 \\
U_{21} \text{ so, dass an der Fläche } \omega_2\text{: } U_{21} = f_2, \\
U_{22} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad U_{22} = -U_{11}, \\
U_{23} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad U_{23} = -U_{12}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
U_{2j} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad \text{"} \quad U_{2j} = -U_{1,j-1}, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}\right\} \quad 63)
$$

dann stellt die Reihe:

$$64)\quad U = \sum_{1}^{\infty} j\,(U_{1j} + U_{2j})$$

die Potentialfunktion des von $\omega_1\,\omega_2$ begrenzten Gebietes dar, welche an der Fläche ω_1 die Randwerte f_1, an der Fläche ω_2 die Randwerte f_2 annimmt.

Der Beweis ist dem Beweise von IVa) völlig analog, nur erhalten wir an Stelle der Formeln 59), welche in Kapitel 1 die Konvergenz der Reihe U bewiesen, die Formeln:

$$65_1)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{11} \overline{\overline{<}}\, \Gamma, \\ \text{abs. } U_{21} \overline{\overline{<}}\, \Gamma, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\,\omega_2,$$

$$65_2)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{12} \overline{\overline{<}}\, \Gamma, \\ \text{abs. } U_{22} \overline{\overline{<}}\, \Gamma\lambda, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\,\omega_2,$$

$$65_3)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{13} \overline{\overline{<}}\, \Gamma\cdot\lambda, \\ \text{abs. } U_{23} \overline{\overline{<}}\, \Gamma\cdot\lambda, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\,\omega_2,$$

$$65_4)\quad \left\{\begin{array}{l} \text{abs. } U_{14} \overline{\overline{<}}\, \Gamma\cdot\lambda, \\ \text{abs. } U_{24} \overline{\overline{<}}\, \Gamma\lambda^2, \end{array}\right\} \text{ im Aufsenraume von } \omega_1\,\omega_2,$$

. . . .

wo Γ den absolut gröfsten Wert von f_1 und f_2, λ einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Lage der Flächen ω_1 und ω_2 abhängt.

§ 2.

Man kann nun die Methode IVa) resp. IVb) auch zur Lösung des allgemeinen Problemes verwenden:

Die Potentialfunktionen eines Gebietes zu bestimmen, das von beliebig vielen getrennten, stetig gekrümmten, geschlossenen Flächen begrenzt wird, an denen ihre Randwerte vorgeschrieben sind.

Man braucht nur mit Hilfe der Sätze IVa) resp. IVb) das Problem zunächst für zwei Begrenzungsflächen zu lösen, darauf dieselbe Methode auf den Komplex dieser beiden Flächen und eine dritte der Begrenzungsflächen anzuwenden, und so fort, bis die Lösung für den Komplex aller Begrenzungsflächen gefunden ist.

IV. Abschnitt.

Eine Ausdehnung des Begriffes der Potentialfunktion für mehrfach zusammenhängende Räume.

1. Kapitel.

Untersuchungen für den Aufsenraum einer Ringfläche.

§ 1.

Eine gegebene Fläche heifst einfach zusammenhängend, wenn sich jede auf der Fläche konstruierte geschlossene Kurve durch stetige Deformation auf der Fläche in eine geschlossene Kurve verwandeln lässt, deren Abstände von einem beliebig gegebenen Punkte der Fläche unter jede beliebig kleine Länge herabgedrückt werden können; im anderen Falle heifst sie mehrfach zusammenhängend.

Ein gegebener Raum heifst einfach zusammenhängend, wenn sich jede in dem Raume konstruierte geschlossene Kurve durch stetige Deformation in dem Raume in eine geschlossene Kurve verwandeln lässt, deren Abstände von einem beliebig gegebenen Punkte des Raumes unter jede beliebig kleine Länge herabgedrückt werden können, im anderen Falle heifst er mehrfach zusammenhängend.

Als typisches Beispiel für den Fall einer mehrfach zusammenhängenden Fläche, von dem aus man leicht Folgerungen für kompliziertere Flächen ziehen kann, wird uns die Ringfläche mit kreisförmigem Querschnitt dienen. Wir denken uns eine solche Ringfläche dadurch erzeugt, dass wir das Centrum einer Kreisfläche σ auf einer stetig gekrümmten, geschlossenen Kurve entlang führen, die man sich als Randkurve einer einfach zusammenhängenden Fläche denken kann, und zwar soll bei dieser Bewegung die

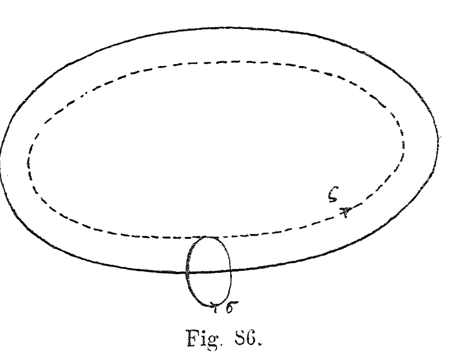


Fig. 86.

Kreisfläche in ihrem Centrum stets normal zu dieser Führungskurve sein; wir nennen dann die von der Kreisperipherie erzeugte Fläche eine Ringfläche mit kreisförmigem Querschnitt, wenn der Radius R des Kreises klein genug gewählt ist, dass jeder Punkt der Fläche von der Führungskurve nur **eine** kürzeste Entfernung (= R) hat.

Eine solche Ringfläche ist mehrfach zusammenhängend, denn wir können weder die Peripherie σ eines Querschnittes, noch eine geschlossene Kurve ς, welche jeden Querschnitt in einem Punkte schneidet und als Randkurve einer einfach zusammenhängenden Fläche angesehen werden kann, durch stetige Deformation auf der Ringfläche in eine geschlossene Kurve verwandeln, deren Abstände von einem beliebig gegebenen Punkte der Fläche unter jede beliebig kleine Länge herabgedrückt werden können. Wir können dies aber mit jeder geschlossenen Kurve erreichen, welche die beiden Kurven σ und ς nicht schneidet. Indem wir σ als eine den Ring einmal umschlingende, ς als eine einmal um den Ring herumlaufende Kurve bezeichnen, können wir, indem wir uns einer üblichen Ausdrucksweise anschliefsen, sagen:

Die Ringfläche wird durch eine den Ring einmal umschlingende Kurve σ und eine einmal um den Ring herumlaufende Kurve ς in eine einfach zusammenhängende Fläche zerlegt.

Ein typisches Beispiel für den Fall eines mehrfach zusammenhängenden Raumes ist der Aufsenraum oder Innenraum einer Ringfläche, und wir wollen uns zunächst mit dem ersteren beschäftigen.

§ 2.

Der Aufsenraum τ_a einer Ringfläche ist ein mehrfach zusammenhängender Raum, denn wir können keine der Kurven Σ,*) welche man durch stetige Deformation in dem Raume τ_a in eine Querschnittsperipherie σ verwandeln kann, durch stetige Deformation in dem Raume τ_a auch in eine Kurve überführen, deren Abstände von irgend einem beliebigen Punkte des Raumes unter jede beliebig kleine Länge herabgedrückt werden können. Wir können dies aber mit jeder in dem Raume τ_a konstruierten

*) Diese Kurven Σ bezeichnen wir ebenso, wie die Querschnittsperipherieen σ als Kurven, welche den Ring einmal umschlingen.

geschlossenen Kurve erreichen, wenn dieselbe eine beliebig konstruierte einfach zusammenhängende Fläche Ω, welche eine um den Ring einmal herumlaufende Kurve ς zur Randkurve hat, nicht schneidet. Wir sagen daher, indem wir uns einer üblichen Ausdrucksweise anschliefsen:

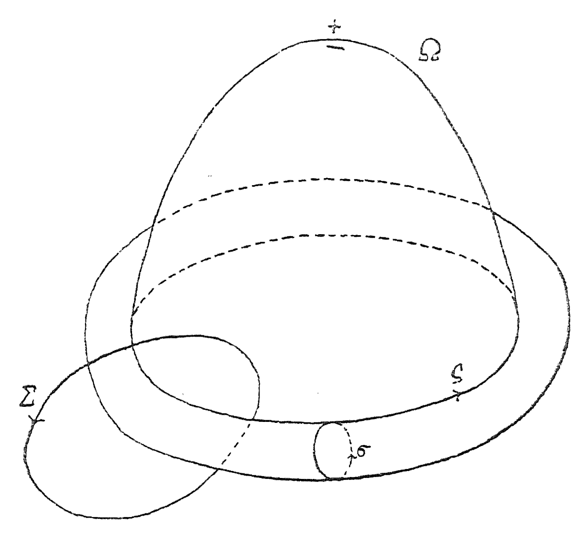


Fig. 87.

Der Aufsenraum einer Ringfläche wird durch eine beliebige einfach zusammenhängende Fläche Ω, welche eine einmal um den Ring herumlaufende Kurve ς zur Randkurve hat, in einen einfach zusammenhängenden Raum zerlegt.

Geben wir der Führungskurve des Ringes eine bestimmte positive Umlaufsrichtung, so sind damit die positiven Umlaufsrichtungen aller den Ring umschlingenden Kurven Σ, sowie dei positive Seite von Ω unzweideutig festgelegt.

§ 3.

Da in der theoretischen Physik empirische Gröfsen, wie Geschwindigkeiten etc. (wir deuten hier namentlich auf die Anwendungen in der Hydrodynamik hin) im allgemeinen den Ableitungen von Potentialfunktionen entsprechen, während eine solche empirische Bedeutung der betreffenden Potentialfunktion

selbst nicht zukommt, so hat man den Begriff der Potentialfunktion dahin erweitert, dass man lediglich von den ersten Ableitungen der Potentialfunktionen Eindeutigkeit und Stetigkeit verlangt, während man der Potentialfunktion selbst allgemeinere Bedingungen auferlegen kann, und zwar hat sich die folgende Erweiterung als am zweckmäfsigsten erwiesen:

Erweiterung des Begriffes der Potentialfunktion in mehrfach zusammenhängenden Räumen.

Denken wir uns einen mehrfach zusammenhängenden Raum durch geeignete Flächen $\Omega_1 \Omega_2 \ldots$ in einen einfach zusammenhängenden Raum zerlegt, so soll jede Potentialfunktion dieses einfach zusammenhängenden Raumes (in dem durch die Definitionen S. 180 festgelegten Sinne) auch eine Potentialfunktion des mehrfach zusammenhängenden Raumes genannt werden, falls nur die ersten Ableitungen dieser Funktion zu beiden Seiten der Flächen $\Omega_1 \Omega_2 \ldots$ dieselben Werte haben.

Von einer Potentialfunktion U des Aufsenraumes unserer Ringfläche werden wir somit Eindeutigkeit und Stetigkeit nur verlangen, solange wir nicht durch den Querschnitt Ω hindurchgehen, dagegen müssen die Ableitungen

$$\frac{\partial U}{\partial x}, \frac{\partial U}{\partial y}, \frac{\partial U}{\partial z}$$

bei dem Durchgange durch diesen Querschnitt stetig bleiben.

Bezeichnen wir die Werte, welche U annimmt, wenn wir uns einem Punkte des Querschnittes Ω von der positiven resp. negativen Seite unendlich nähern, resp. mit U_+ und U_-, so wird im allgemeinen:

$$U_+ - U_- \neq 0$$

sein, wir setzen:

$$66) \quad U_- - U_+ = K,$$

dann folgt zunächst leicht, dass K auf Ω konstant sein muss, denn bezeichnen wir mit h irgend eine tangentiale Richtung, so ist wegen der Stetigkeit der Ableitungen von U:

$$\left|\frac{\partial U}{\partial h}\right|_+ - \left|\frac{\partial U}{\partial h}\right|_- = 0.$$

Wir können aus dieser Konstanz von K auch die Folgerung ziehen, dass für jede den Ring einmal umschlingende Kurve Σ:

$$67)\quad \int\limits_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma}\, d\sigma = K$$

ist.

§ 4.

Wir wollen nach diesen Vorbereitungen einige frühere Resultate über Potentialfunktionen auf die so erweiterten Potentialfunktionen des Aufsenraumes einer Ringfläche ausdehnen.

Wir hatten früher für eine Potentialfunktion U des Aufsenraumes einer Fläche ω mit der äufseren Normalen ν die Formel abgeleitet [Satz IIb) des III. Teiles S. 187]:

$$U = -\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega.$$

Würden wir diese Formel für eine Potentialfunktion des Aufsenraumes der Ringfläche ω aufstellen, so würden wir bei der Erweiterung des Begriffes der Potentialfunktion im allgemeinen zu falschen Resultaten gelangen; wir haben hier zu der Begrenzung des Raumes, dessen Potentialfunktion U in dem früheren Sinne ist, die positive und negative Seite des Querschnittes Ω mitzuzählen und erhalten die folgende Formel:

$$\begin{aligned} U = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} U_{+}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ &+\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} - \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} U_{-}\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega, \end{aligned}$$

oder:

$$68)\quad \left\{ \begin{aligned} U = &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} \frac{\partial U}{\partial \nu}\frac{d\omega}{r} + \frac{1}{4\pi}\int\limits_{\omega} U\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega \\ &-\frac{1}{4\pi}\int\limits_{\Omega} K\,\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega. \end{aligned} \right.$$

Es ist aus dieser Formel leicht zu ersehen, dass es für die Ableitungen von U ganz gleichgültig ist, welche Fläche Ω wir zur Zerlegung des Aufsenraumes der Ringfläche in einen einfach zusammenhängenden Raum benützen; denn die Ableitungen von:

$$K \int\limits_{\Omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega$$

sind von dem Verlaufe der Fläche Ω ganz unabhängig; es ist nach Formel 59) S. 46:

$$69) \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \int\limits_{\Omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \int\limits_{\varsigma} \frac{\cos(ry)\cos(\varsigma z) - \cos(rz)\cos(\varsigma y)}{r^2}\, d\varsigma, \\ \frac{\partial}{\partial y} \int\limits_{\Omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \int\limits_{\varsigma} \frac{\cos(rz)\cos(\varsigma x) - \cos(rx)\cos(\varsigma z)}{r^2}\, d\varsigma, \\ \frac{\partial}{\partial z} \int\limits_{\Omega} \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \int\limits_{\varsigma} \frac{\cos(rx)\cos(\varsigma y) - \cos(ry)\cos(\varsigma x)}{r^2}\, d\varsigma. \end{cases}$$

§ 5.

Wir hatten früher bewiesen, dass eine Potentialfunktion U des Aufsenraumes einer Fläche ω sowohl durch die Angabe ihrer Randwerte, als auch durch die Angabe ihrer normalen Ableitungen, eindeutig*) bestimmt ist, falls sich überhaupt die Existenz der betreffenden Funktion nachweisen lässt. [IXa) und IXb) des III. Teiles S. 206].

Wir stützten uns zum Beweise auf die Formel:

$$\int\limits_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] d\tau = -\int\limits_{\omega} U \frac{\partial U}{\partial \nu}\, d\omega.$$

Wir dachten uns zwei Potentialfunktionen U_1 U_2 des Aufsenraumes, für die an der Fläche ω

$$U_1 = U_2,$$

$$\text{oder: } \frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \frac{\partial U_2}{\partial \nu},$$

*) Eventuell bis auf eine willkürliche additive Konstante.

und brachten die letzte Formel auf die Potentialfunktion $U_1 - U_2$ zur Anwendung:

$$\int_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = -\int_{\omega} (U_1 - U_2) \left(\frac{\partial U_1}{\partial \nu} - \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) d\omega.$$

Sind nun U_1 U_2 Potentialfunktionen des Aufsenraumes der Ringfläche in dem erweiterten Sinne, so müssen wir zu der Begrenzung des Raumes τ_a noch die positive und negative Seite von Ω hinzurechnen, so dass:

$$70)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_{\tau_a} \left[\left(\frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial(U_1 - U_2)}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau \\ \displaystyle\qquad = -\int_{\omega} (U_1 - U_2) \left(\frac{\partial U_1}{\partial \nu} - \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) d\omega \\ \displaystyle\qquad + \int_{\Omega} (K_1 - K_2) \left(\frac{\partial U_1}{\partial \nu} - \frac{\partial U_2}{\partial \nu} \right) d\omega, \end{cases}$$

wenn an der Fläche Ω:

$$71)\quad \begin{cases} U_{1-} - U_{1+} = K_1, \\ U_{2-} - U_{2+} = K_2. \end{cases}$$

In diesem Falle wird, wenn an der Ringfläche:

$$\frac{\partial U_1}{\partial \nu} = \frac{\partial U_2}{\partial \nu},$$

das in 70) links stehende Integral nur dann null, d. h. nur dann überall im Aufsenraum der Ringfläche:

$$U_1 = U_2$$

werden, wenn zugleich:

$$K_1 = K_2.$$

Wir erhalten so das Resultat:

Va) Eine Potentialfunktion U des Aufsenraumes einer Ringfläche in dem durch die Definition S. 364 erweiterten Sinne ist durch die Kenntnis ihrer normalen

Ableitungen an der Ringfläche — wenn sich überhaupt die Existenz einer solchen Funktion beweisen lässt — noch nicht eindeutig bestimmt. Man braucht zur völligen Bestimmung noch die Angabe des konstanten Wertes K, den die über eine beliebige den Ring einmal umschlingende Kurve Σ zu erstreckenden Integrale:

$$\int_{\Sigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma$$

annehmen sollen.

2. Kapitel.

Untersuchungen für den Innenraum einer Ringfläche.

§ 1.

Der Innenraum τ_i einer Ringfläche ist ein mehrfach zusammenhängender Raum, denn man kann keine der Kurven,*) welche man durch stetige Deformation in dem Raume τ_i in eine einmal um den Ring herumlaufende Kurve ς verwandeln kann, durch stetige Deformation in dem Raume τ_i auch in eine Kurve überführen, deren Abstände von einem beliebigen Punkte des Raumes unter jede beliebig kleine Länge herabgedrückt werden können. Wir können dies aber mit jeder in dem Raume τ_i konstruierten geschlossenen Kurve erreichen, wenn dieselbe einen beliebigen der kreisförmigen Querschnitte des Ringes nicht schneidet. Wir sagen daher:

Der Innenraum der Ringfläche wird durch einen beliebigen seiner kreisförmigen Querschnitte in einen einfach zusammenhängenden Raum zerlegt.

§ 2.

Wir gelangen in genau analoger Weise, wie wir den Satz Va) abgeleitet haben, zum Beweise des korrespondierenden Satzes für den Innenraum einer Ringfläche:

---

*) Wir bezeichnen diese Kurven gleichfalls als einmal um den Ring herumlaufende Kurven.

Vb) Eine Potentialfunktion U des Innenraumes einer Ringfläche in dem durch die Definition S. 364 festgelegten Sinne ist durch die Kenntnis ihrer normalen Ableitungen an der Ringfläche — wenn sich überhaupt die Existenz einer solchen Funktion beweisen lässt — noch nicht eindeutig bestimmt. Man braucht zur völligen Bestimmung noch die Angabe des konstanten Wertes K, den die über eine beliebige um den Ring einmal herumlaufende Kurve ς zu erstreckenden Integrale:

$$\int\limits_{\varsigma} \frac{\partial U}{\partial \sigma} d\sigma$$

annehmen sollen.

Anmerkungen.

1 (1) Ist U lediglich als eine Funktion der Stelle auf ω definiert, so denken wir uns das Flächenstück $\bar{d}\omega$ mit seinen Funktionswerten in der Richtung der Normalen ν_0 des Punktes $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ und in entgegengesetzter Richtung um eine kleine Strecke $\mathfrak{r}$ parallel verschoben, dann ist in dem so entstehenden kleinen Cylinder, bei genügend kleinem $\mathfrak{r}$, U eindeutig und stetig, seine Ableitungen sind im allgemeinen eindeutig und stetig (vgl. Def. S. 16), es folgt dann die im Text gegebene Entwickelung aus dem Taylorschen Satze.

2 (2) Es ist:

$$\text{abs.} \int_\varsigma \varDelta \cdot \cos(\varsigma x)\, d\varsigma \mathrel{\overline{\overline{<}}} D \cdot \text{abs.} \int_\varsigma r\, d\varsigma.$$

Denkt man sich die Kurve ς auf die Tangentialebene in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ projiziert, so ist:

$$r = \frac{P}{|\sin(r\nu_0)|},$$

$$d\varsigma = \frac{ds}{|\sin(\varsigma\nu_0)|},$$

wenn P den Radiusvektor, ds ein Element der projizierten Kurve s vorstellt. Man kann nun die $\bar{d}\omega$ stets so einrichten, dass alle $\sin(r\nu_0)$, $\sin(\varsigma\nu_0)$ von null verschieden und alle $\sin(Ps)$ von null verschiedene Zahlen gleichen Vorzeichens sind; dann folgt:

$$\text{abs.} \int_\varsigma r\, d\varsigma \mathrel{\overline{\overline{<}}} (\text{endliche Konstante})\ \text{abs.} \int_s P \sin(Ps)\, ds,$$

und da das Integral rechts die von s umschlossene Fläche vorstellt, um so mehr:

$$\mathrel{\overline{\overline{<}}} A\, \bar{d}\omega,$$

und:

$$\text{abs.} \int_\varsigma \varDelta \cdot \cos(\varsigma x)\, d\varsigma \mathrel{\overline{\overline{<}}} A \cdot D \cdot \bar{d}\omega,$$

wo A eine endliche Konstante vorstellt.

(3) Seien in dem zweiten Falle 3

$$\overline{U},\ \overline{V},\ \overline{W}$$

die Randwerte der Funktionen U, V, W, so ist:

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial \xi}} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \xi} + \overline{\frac{\partial U}{\partial \nu}} \cos(\nu x),$$

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial \eta}} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \eta} + \overline{\frac{\partial U}{\partial \nu}} \cos(\nu y),$$

$$\overline{\frac{\partial U}{\partial \zeta}} = \frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta} + \overline{\frac{\partial U}{\partial \nu}} \cos(\nu z),$$

und analoge Formeln gelten für V und W, wenn man immer durch die horizontalen Striche andeutet, dass der Randwert der betreffenden Funktion an der Fläche zu nehmen ist.

Es ist daher:

$$\int\limits_{\omega}\left\{\left(\frac{\partial W}{\partial \eta} - \frac{\partial V}{\partial \zeta}\right)\cos(\nu x) + \left(\frac{\partial U}{\partial \zeta} - \frac{\partial W}{\partial \xi}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial V}{\partial \xi} - \frac{\partial U}{\partial \eta}\right)\cos(\nu z)\right\} d\omega$$

$$= \int\limits_{\omega}\left\{\left(\frac{\partial \overline{W}}{\partial \eta} - \frac{\partial \overline{V}}{\partial \zeta}\right)\cos(\nu x) + \left(\frac{\partial \overline{U}}{\partial \zeta} - \frac{\partial \overline{W}}{\partial \xi}\right)\cos(\nu y) + \left(\frac{\partial \overline{V}}{\partial \xi} - \frac{\partial \overline{U}}{\partial \eta}\right)\cos(\nu z)\right\} d\omega$$

und nunmehr nach Satz B:

$$= \int\limits_{\sigma} [U \cos(\sigma x) + V \cos(\sigma y) + W \cos(\sigma z)]\, d\sigma.$$

Die eben gegebene Ableitung einer solchen Ausdehnung des Stokesschen Theorems hat keine Schwierigkeit, wenn U V W und ihre ersten Ableitungen in einem endlichen Raumgebiete eindeutig und stetig sind, das von ω und einer Fläche, die mit ω dieselbe Randkurve, sonst keinen Punkt gemein hat, begrenzt wird. Auf eine weitere Verallgemeinerung wollen wir hier nicht eingehen.

(4) Es ist: 4

$$\text{abs.} \int\limits_{o} \Delta \cdot \cos(\nu x)\, do \leqq D \cdot \text{abs.} \int\limits_{o} r\, do;$$

es lassen sich nun die $\overline{d\tau}$ stets so einrichten, dass alle $\cos(r\nu)$ von null verschiedene Zahlen gleichen Vorzeichens sind; es folgt so:

$$\text{abs.} \int\limits_{o} r\, do \leqq (\text{endliche Konstante})\ \text{abs.} \int\limits_{o} r \cos(r\nu)\, do,$$

und da das Integral rechts das dreifache von o umschlossene Volumen vorstellt:

$$\overline{\overline{<}} A \cdot \bar{d}\tau,$$

und:

$$\text{abs.} \int_o \varDelta \cdot \cos(\nu x)\, do \overline{\overline{<}} A \cdot D \cdot \bar{d}\tau,$$

wo A eine endliche Konstante vorstellt.

5 (5) Um diese Behauptung zu beweisen, denken wir uns in einem Punkte σ_0 oder $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ der Kurve, der kein Randpunkt derselben sein möge, noch ein Trennungspunkt stetig gekrümmter Kurventeile, die Normalebene und in dieser den Punkt (xyz). Um zu entscheiden, ob die Entfernung r_0 des Punktes (xyz) von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ eine gröfste oder kleinste Entfernung des Punktes (xyz) von der Kurve oder keines von beiden ist, ziehen wir noch die Grade $(r_0 + \delta r)$ von (xyz) nach dem Punkte $\sigma_0 + \delta\sigma$ oder $(\xi \eta \zeta)$ der Kurve, wobei $\delta\sigma$ klein genug gewählt sei, dass $(\xi \eta \zeta)$ sich in der Form darstellen lassen:

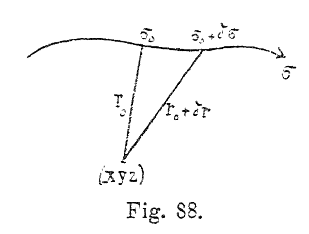


Fig. 88.

$$\xi = \xi_0 + \delta\sigma \left|\frac{d\xi}{d\sigma}\right|_{\sigma_0} + \frac{1}{2}\delta\sigma^2 \left|\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right|_{\sigma_0 + \theta\delta\sigma}, \ldots \; (0 \overline{\overline{<}} \theta \overline{\overline{<}} 1);$$

dann ist:

$$(r_0 + \delta r)^2 = r_0^2 + \delta\sigma^2 \left\{ 1 - \left[(x - \xi_0) \left|\frac{d^2\xi}{d\sigma^2}\right|_{\sigma_0 + \theta\delta\sigma} + (y - \eta_0) \left|\frac{d^2\eta}{d\sigma^2}\right|_{\sigma_0 + \theta\delta\sigma} + (z - \zeta_0) \left|\frac{d^2\zeta}{d\sigma^2}\right|_{\sigma_0 + \theta\delta\sigma} \right] + \varDelta \right\},$$

wo $\varDelta$ durch Verkleinerung von $\delta\sigma$ unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Wegen der Endlichkeit der zweiten Ableitungen von ξ, η, ζ können wir daher bei genügend kleinem r_0 und genügend kleinem $\delta\sigma$ stets erreichen, dass:

$$(r_0 + \delta r)^2 = r_0^2 + \Theta\, \delta\sigma^2,$$

wo Θ eine von null verschiedene, positive Zahl vorstellt. Diese Formel beweist die Behauptung.

6 (6) Wir schliefsen uns hier und in allem folgenden einer üblichen, abgekürzten Ausdrucksweise an; wenn man von dem Werte einer Funktion der Stelle (x, y, z), die sich als ein Flächenintegral über eine Fläche ω darstellt, bei unendlicher Annäherung an die Fläche ω spricht, so hat man es eigentlich mit einem doppelten Grenzübergang zu thun, der unendlichen Annäherung des Punktes (xyz) an die Fläche ω und dem durch die Integration involvierten Grenzübergang; damit dieser doppelte Grenzübergang

stets eindeutig ausgelegt werde, wird stillschweigend die Festsetzung getroffen, dass, wie klein man auch die Entfernung des variabeln Punktes von ω annehmen möge, immer sollen die gröfsten Distanzen innerhalb der Flächenelemente $d\omega$ gegen jene Entfernungen unendlich klein sein.

(7) Der absolute Wert einer Summe ist stets $\leqq$ der Summe der absoluten Werte der Summanden. **7**

(8) Ist H lediglich als Funktion der Stelle auf der Fläche aufzufassen, so kann man: **8**

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} \cos(\nu x) + \frac{\partial H}{\partial \eta} \cos(\nu y) + \frac{\partial H}{\partial \zeta} \cos(\nu z) = 0$$

setzen.

(9) d. h. derjenigen Kurven, welche zu einer solchen Zerlegung notwendig sind. **9**

(10) Ist $\varkappa$ lediglich als Funktion der Stelle auf der Fläche aufzufassen, so kann man: **10**

$$\frac{\partial \varkappa}{\partial \xi} \cos(\nu x) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta} \cos(\nu y) + \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta} \cos(\nu z) = 0$$

setzen.

(11) Wir betrachten hier H lediglich als Funktion der Stelle auf der Fläche [vgl. Anm. (8)]. **11**

(12) Wir betrachten hier $\varkappa$ lediglich als Funktion der Stelle suf der Fläche [vgl. Anm. (10)]. **12**

(13) Für innere Punkte haben wir auch zur Begrenzung die unendlich kleine Kugelfläche (R) hinzuzurechnen, die innere Normale ν des in Fig. 29 schraffierten Gebietes wird dabei durch die äufsere Normale der Kugelfläche repräsentiert, es folgt somit: **13**

$$\int\limits_{(R)} \frac{\cos(r\nu)}{r} d\omega = -\frac{1}{R} \int\limits_{(R)} d\omega = -4\pi R.$$

(14) Diese Entwickelung von $\cos(r\nu)$ folgt aus der Eindeutigkeit und Stetigkeit von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ und der Endlichkeit ihrer ersten Ableitungen. **14**

(15) Es liefse sich der Einwand erheben, dass man das Integral in dieser Formel bereits als uneigentliches Integral auffassen muss; wir brauchen indessen diese neue Festsetzung nicht, wenn wir **15**

$$-\int\limits_{\omega} H \frac{\cos(rx)}{r^2} d\omega, \ldots$$

auf der Fläche als die Ableitungen des uneigentlichen Integrales:

$$\int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

auffassen.

16 (16) In Punkten der Trennungskurven kommen W resp. W bestimmte Werte zu, welche mit den Randwerten an der positiven und negativen Seite von ω durch die Relationen verbunden sind:

$$W = W_{+} - \tilde{\omega}\varkappa,$$
$$= W_{-} + \tilde{\omega}\varkappa,$$

wo $\tilde{\omega}$ eine zwischen 0 und 4π liegende Zahl vorstellt.

17 (17) Dass das Integral:

$$J \equiv \lim \int_{\varsigma} H \frac{\cos(\nu y)\ \cos(\varsigma z) - \cos(\nu z)\ \cos(\varsigma y)}{r} d\varsigma = 0$$

ist, wenn man ς den Punkt (xyz) (mit der positiven Normalen ν_0) immer näher und näher umschliefsen lässt, folgt, weil man ς so wählen kann, dass seine Projektion auf die Tangentialebene in (xyz) ein Kreis s mit dem kleinen Radius P um (xyz) als Centrum ist; es ist dann bei genügend kleinem P für irgend einen Punkt von ς:

$$d\varsigma = ds\,(1 + r \cdot \psi)$$
$$\cos(\nu y)\ \cos(\varsigma z) - \cos(\nu z)\ \cos(\varsigma y) = \cos(\nu_0 y)\ \cos(sz) - \cos(\nu_0 z)\ \cos(sy) + r \cdot \varphi$$
$$H = H(xyz) + r \cdot \Phi,$$

wo φ, ψ stets endlich sind, desgleichen Φ, wenn die ersten Ableitungen von H endlich sind.

Es folgt somit:

$$J = \lim \cdot H(xyz) \int_{s} \frac{\cos(\nu_0 y)\ \cos(sz) - \cos(\nu_0 z)\ \cos(sy)}{r} ds.$$

Ferner ist:

$$r = \frac{P}{\sin(r\nu_0)},$$
$$\frac{1}{r} = \frac{1}{P}(1 + \varepsilon),$$

wo ε durch Verkleinerung von P unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, somit:

$$J = \lim \cdot H(xyz) \int_{s} \frac{\cos(\nu_0 y)\ \cos(sz) - \cos(\nu_0 z)\ \cos(sy)}{P} ds = 0.$$

18 (18) Es geht aus dieser Bemerkung deutlich hervor, dass die Ableitung $\frac{\partial V}{\partial \nu_0}$, wenn man in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ die Normale ν_0 errichtet und den variabeln Punkt (xyz) auf dieser Normalen von irgend einer endlichen Entfernung r aus von der einen oder anderen Seite der Fläche unendlich nahe an $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$

heranrücken lässt, auf dieser Strecke eindeutig und stetig ist*), wobei wir lediglich H als eindeutig und stetig anzunehmen brauchen, ohne irgend welche Annahmen über die ersten Ableitungen von H hinzuzunehmen.

In einem besonderen Falle sind auch die Formeln 113a) von jeder Bedingung über die ersten Ableitungen von H unabhängig, nämlich wenn H von der Form ist:

$$H = \mathrm{f} \cos(\nu \mathrm{h}), \quad (\mathrm{f}\ \text{endlich})$$

und h eine in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ zu ω tangentiale Richtung vorstellt. In diesem Falle ist in einem endlichen Gebiete ω_1 um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$:

$$\cos(\nu \mathrm{h}) = \mathrm{r} \cdot \varphi,$$

wo φ stets endlich ist, somit z. B.

$$\left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)} = \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{+} = \left|\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{-} = -\int\limits_{\omega - \omega_1} H \frac{\cos(\mathrm{rx})}{\mathrm{r}^2} d\omega - \int\limits_{\omega_1} \mathrm{f} \cdot \varphi \frac{\cos(\mathrm{rx})}{\mathrm{r}} d\omega;$$

in diesem Falle können wir die Randwerte von $\frac{\partial V}{\partial x}$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ gerade so bilden, als ob $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ gerade auf der Fläche läge.

(19) Das gilt (da $\overline{W}$ eindeutig und stetig ist, solange wir nicht durch ς hindurchgehen), wenn wir auf dem Kreise (ϱ) auf dem Wege von B nach X in positivem Sinne fortschreitend ς nicht durchkreuzen; das können wir aber, da die z Axe nach der konvexen Seite von ς positiv ist, bei genügender Verkleinerung von ϱ stets erreichen. **19**

(20) Es mögen in dem Punkte N zwei stetig gekrümmte Teile σ_1 und σ_2 der Randkurve unter einem (von null verschiedenen) Winkel zusammenlaufen. Wir haben zwei Fälle zu unterscheiden. **20**

1. Fall. Der Winkel, den σ_1 und σ_2 einschliefsen, ist $\overline{\overline{<}}\ \pi$. Dann wird in einem endlichen Gebiete um N die kürzeste Entfernung irgend eines Punktes $(\xi \eta \zeta)$ der Fläche ω von der Randkurve entweder auf σ_1 oder auf σ_2 senkrecht sein, und wie nahe wir $(\xi \eta \zeta)$ auch bei N annehmen, stets werden sämmtliche Argumente der Beweise im Texte gültig bleiben.

Fig. 89.

2. Fall. Der Winkel, den σ_1 und σ_2 einschliefsen, ist $\overline{\overline{>}}\ \pi$. In diesem Falle legen wir in N zu σ_1 die Normalebene, welche ω in ς_1 schneide, und zu σ_2 die Normalebene, welche ω in ς_2 schneide; wir teilen dadurch in einem endlichen Bereiche um N die

*) Wenn nur r genügend klein ist, so dass wir bei dieser Wanderung ω nicht schneiden.

Fläche in drei Teile I, II, III so, dass die kürzeste Entfernung jedes Punktes des Teiles I von der Randkurve auf σ_1, die kürzeste Entfernung jedes Punktes des Teiles II von der Randkurve auf σ_2 senkrecht ist, während alle Punkte des Teiles III von N kürzere Entfernungen haben, als von irgend einem anderen Punkte der Randkurve. Während daher für Punkte der Teile I und II alle Argumente des Beweises im Text in Gültigkeit bleiben, ist für den Fall, dass der variable Punkt (xyz) im Teile III liegt, eine besondere Betrachtung nötig.

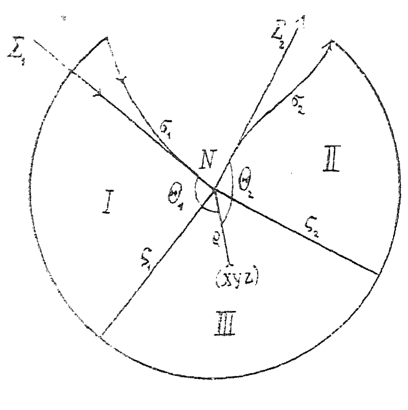


Fig. 90.

Es ist zunächst aus unseren früheren Untersuchungen ersichtlich, dass sich die Ausdrücke:

$$\varrho \frac{\partial \overline{W}}{\partial x}, \ldots$$

von den Ausdrücken:

$$\varrho \int\limits_{\Sigma_1 + \Sigma_2} \frac{\cos(ry)\,\cos(\sigma z) - \cos(\sigma z)\,\cos(ry)}{r^2}\, d\sigma, \ldots$$

bei genügend kleinem ϱ für Punkte (xyz) des Teiles III nur um Gröſsen von der Form $\mathfrak{D}(\varrho)$ unterscheiden werden, wenn wir die Integrationen in den letzten Integralen über die Tangenten Σ_1 und Σ_2 von σ_1 und σ_2 in N erstrecken; um diese Ausdrücke zu untersuchen, nehmen wir für den Augenblick die Richtung der Tangente Σ_1 zur x Axe, positiv in der Richtung N $\longrightarrow \infty$ *), und berechnen die Integrale:

$$\int\limits_{\Sigma_1} \frac{\cos(rx)}{r^2}\, d\sigma = + \int\limits_0^\infty \frac{\cos(rx)}{r^2}\, d\xi,$$

$$\int\limits_{\Sigma_1} \frac{\cos(ry)}{r^2}\, d\sigma = + \int\limits_0^\infty \frac{\cos(ry)}{r^2}\, d\xi,$$

$$\int\limits_{\Sigma_1} \frac{\cos(rz)}{r^2}\, d\sigma = + \int\limits_0^\infty \frac{\cos(rz)}{r^2}\, d\xi$$

für Punkte mit negativem x.

*) Die in Fig. 90 beigefügten Pfeile markieren die positive Richtung der Randkurve, resp. die positiven Richtungen, in denen die obigen Integrale über Σ_1 und Σ_2 zu erstrecken sind.

Es ergiebt sich analog der Untersuchung S. 7 :

$$\text{a)}\quad\begin{cases}\displaystyle\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(rx)}{r^2}\,d\sigma=-\frac{1}{\varrho},\\[2ex]\displaystyle\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(ry)}{r^2}\,d\sigma=+\frac{1}{\varrho}\cot\frac{\Theta_1}{2},\\[2ex]\displaystyle\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(rz)}{r^2}\,d\sigma=0,\end{cases}$$

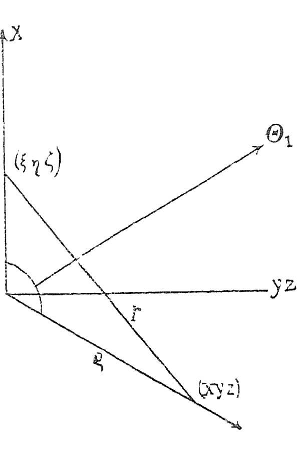


Fig. 91.

wenn Θ_1 den Winkel vorstellt, den die x Axe mit der Richtung ϱ bildet und wir die y Axe in der durch die x Axe und die Grade ϱ gelegten Ebene annehmen.*) Gehen wir von diesem speciellen auf ein allgemeines (positives) Koordinatensystem zurück, so wird:

$$\text{b)}\quad\begin{cases}\displaystyle\varrho\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(rx)}{r^2}\,d\sigma=+\cos(\Sigma_1 x)+\cot\frac{\Theta_1}{2}\cos(\varsigma_1 x)+D_1(\varrho),\\[2ex]\displaystyle\varrho\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(ry)}{r^2}\,d\sigma=+\cos(\Sigma_1 y)+\cot\frac{\Theta_1}{2}\cos(\varsigma_1 y)+D_2(\varrho),\\[2ex]\displaystyle\varrho\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(rz)}{r^2}\,d\sigma=+\cos(\Sigma_1 z)+\cot\frac{\Theta_1}{2}\cos(\varsigma_1 z)+D_3(\varrho),\end{cases}$$

wenn man die Richtung ς_1 von N in die Fläche ω hinein positiv rechnet, somit:

$$\begin{aligned}\varrho\int_{\Sigma_1}\frac{\cos(ry)\cos(\sigma z)-\cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\,d\sigma&=\cot\frac{\Theta_1}{2}\,[\cos(\varsigma_1 y)\cos(\Sigma_1 z)\\&\quad-\cos(\varsigma_1 z)\cos(\Sigma_1 y)]+\mathfrak{D}_1(\varrho),\ \ldots\\&=-\cot\frac{\Theta_1}{2}\cos(\nu x)+\mathfrak{D}_1(\varrho),\ \ldots\end{aligned}$$

Analog ist:

$$\varrho\int_{\Sigma_2}\frac{\cos(ry)\cos(\sigma z)-\cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\,d\sigma=-\cot\frac{\Theta_2}{2}\cos(\nu x)+D_1(\varrho),\ \ldots,$$

wenn Θ_2 den Winkel vorstellt, den die Richtung ϱ mit σ_2 einschliefst.

---

*) Dieselbe wird somit nahe mit der Richtung ς_1 zusammenfallen.

Es ergeben sich somit für diesen Fall als Erweiterung des Satzes VIIb) die Formeln*):

$$\text{c)}\quad \begin{cases} \varrho \dfrac{\partial W}{\partial x} = -\left(\cot\dfrac{\Theta_1}{2} + \cot\dfrac{\Theta_2}{2}\right)\cos(\nu x) + \varDelta_1(\varrho), \\ \varrho \dfrac{\partial W}{\partial y} = -\left(\cot\dfrac{\Theta_1}{2} + \cot\dfrac{\Theta_2}{2}\right)\cos(\nu y) + \varDelta_2(\varrho), \\ \varrho \dfrac{\partial W}{\partial z} = -\left(\cot\dfrac{\Theta_1}{2} + \cot\dfrac{\Theta_2}{2}\right)\cos(\nu z) + \varDelta_3(\varrho), \end{cases}$$

aus denen folgt, dass Zusatz 1 und 2 zu VIIb) auch in diesem Falle in Geltung bleiben.

Die Formeln a) gestatten uns noch den folgenden Schluss: Da bei den in a) vorkommenden Integralen über halbe unendliche Graden alle cos(rx) für sich und alle cos(ry) für sich stets dasselbe Vorzeichen haben, so können wir folgende Bemerkung machen:

Bemerkung. Für die über die Randkurve σ**) eines beliebigen Flächenstückes ω zu erstreckenden Integrale:

$$\int\limits_\sigma \frac{\text{abs.}\cos(rx)}{r^2}\,d\sigma,\quad \int\limits_\sigma \frac{\text{abs.}\cos(ry)}{r^2}\,d\sigma,\quad \int\limits_\sigma \frac{\text{abs.}\cos(rz)}{r^2}\,d\sigma$$

gelten bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ des variabeln Punktes (xyz) von σ stets Formeln von der Form:

$$\varrho\int\limits_\sigma \frac{\text{abs.}\cos(rx)}{r^2}\,d\sigma = \alpha + \varDelta_1(\varrho),$$

$$\varrho\int\limits_\sigma \frac{\text{abs.}\cos(ry)}{r^2}\,d\sigma = \beta + \varDelta_2(\varrho),$$

$$\varrho\int\limits_\sigma \frac{\text{abs.}\cos(rz)}{r^2}\,d\sigma = \gamma + \varDelta_3(\varrho),$$

wo α, β, γ endliche Konstanten vorstellen.

21 (21) Wir haben — unter Zugrundelegung der Bezeichnungen in Fig. 39, indem wir die x Axe für den Augenblick in die Richtung σ legen — zu zeigen, dass die Ausdrücke:

---

*) Schliefsen σ_1 und σ_2 den Winkel π ein, so ist

$$\Theta_1 = \Theta_2 = \frac{\pi}{2}$$

und die obigen Formeln gehen in die Formeln 138) über.

**) Dieselbe möge Trennungspunkte haben oder nicht.

$$\varrho\int_{-S}^{+S}\Delta\varkappa\,\frac{\cos(r'x)}{r'^2}\,d\xi',\quad \varrho\int_{-S}^{+S}\Delta\varkappa\,\frac{\cos(r'y)}{r'^2}\,d\xi',\quad \varrho\int_{-S}^{+S}\Delta\varkappa\,\frac{\cos(r'z)}{r'^2}\,d\xi'$$

bei genügender Verkleinerung von S und $\frac{\varrho}{S}$ von der Form $\Delta(\varrho)$ werden.*)

Wir bezeichnen mit φ den Winkel, den die Projektion der Richtung ϱ auf die yz Ebene mit der y Axe bildet, mit θ den Winkel der Richtungen r' und ϱ (positiv oder negativ zu rechnen, je nachdem ξ' positiv oder negativ ist), dann ist:

$$\cos(r'x) = -\sin\theta,$$
$$\cos(r'y) = \cos\theta\,\cos\varphi,$$
$$\cos(r'z) = \cos\theta\,\sin\varphi,$$

von den obigen Ausdrücken ist daher seinem absoluten Werte nach:

$$\text{der erste} \leqq 2\varrho \text{ abs. Max.}(\Delta\varkappa)\int_{-S}^{0}\frac{\cos(r'x)}{r'^2}\,d\xi',$$

$$\text{der zweite} \leqq \varrho \text{ abs.}\cos\varphi \text{ abs. Max.}(\Delta\varkappa)\int_{-S}^{+S}\frac{\cos\theta}{r'^2}\,d\xi',$$

$$\text{der dritte} \leqq \varrho \text{ abs.}\sin\varphi \text{ abs. Max.}(\Delta\varkappa)\int_{-S}^{+S}\frac{\cos\theta}{r'^2}\,d\xi',$$

das erste der drei Integrale rechts ist

$$= \frac{1}{\varrho} - \frac{1}{\sqrt{\varrho^2+S^2}},$$

$$\text{das zweite} = \frac{2}{\varrho}\cdot\frac{S}{\sqrt{\varrho^2+S^2}},$$

$$\text{das dritte} = \frac{2}{\varrho}\cdot\frac{S}{\sqrt{\varrho^2+S^2}},$$

(vgl. S. 79 bis 80).

Es folgt daraus, dass wir durch genügende Verkleinerung von S und $\frac{\varrho}{S}$ die drei obigen Ausdrücke auf die Form $\Delta(\varrho)$ bringen können, wenn abs. Max. $(\Delta\varkappa)$ bei genügend kleinem S von der Form $\Delta(S)$ ist.

---

*) Die Ausdehnung auf Randkurven mit Trennungspunkten erledigt sich, wie in Anm. (20).

Bemerkung. Für die Gültigkeit der Resultate des Textes ist also eigentlich die Voraussetzung hinzuzunehmen, dass für zwei genügend nahe Punkte 1 und 2 der Randkurve σ:*)

$$\text{abs.}\,(\varkappa_1 - \varkappa_2) \overline{\gtrless} A \cdot S_{12}^{\,1-\lambda}, \begin{pmatrix} A \text{ endlich,} \\ \lambda < 1 \end{pmatrix}$$

wenn S_{12} die Entfernungen von 1 nach 2 vorstellt.

Wir haben diese Bedingung im Text lediglich deshalb nicht hinzugefügt, weil dieselbe für unsere Hauptuntersuchungen, bei denen keine Randkurven vorhanden sind und höchstens konstante Sprünge von $\varkappa$ in einer endlichen Anzahl von Trennungskurven vorkommen, belanglos sind.

Wir werden übrigens bei einigen allgemeinen Sätzen in Teil IV, die auch für den Fall nicht konstanter Sprünge in den Trennungskurven in Gültigkeit bleiben, auf diese Bemerkung zurückverweisen. [Anm. ([52]).]

22 (22) Dieser Fall erledigt sich durch eine der Untersuchung in Anm. ([20]) ähnliche Betrachtung.

23 (23) Zusatz 2 zu VIIIa) folgt genau wie Zusatz 1 zu VIIIa), da bei den Voraussetzungen desselben das Kurvenintegral in der Formel 148) null ist.

Genügt $\varkappa$ nur den allgemeineren Bedingungen des Satzes VIIIa), so geht aus der Ableitung des 1. Zusatzes und der Formel 148) hervor, dass, wenn wir die Richtung ν' zur x Axe wählen:

$$\varrho' \frac{\partial W}{\partial \nu'} = \varrho' \int\limits_{\sigma} \varkappa \frac{\cos(ry)\cos(\sigma z) - \cos(rz)\cos(\sigma y)}{r^2}\, d\sigma + \varDelta(\varrho'),$$

oder nach VIIb) [unter Berücksichtigung der Betrachtung in Anm. ([21])]:

$$\varrho' \frac{\partial W}{\partial \nu'} = \pm 2 \varkappa_P + D(\varrho),$$

wo $\varkappa_P$ den Wert von $\varkappa$ in dem Punkte P der Randkurve vorstellt, dem man sich nähert, und das Vorzeichen + oder — zu wählen ist, je nachdem man ν' in der einen oder anderen Richtung positiv rechnet.

Wir erhalten so:

Zusatz 3 zu VIIIa). Erfüllt $\varkappa$ auf ω lediglich die allgemeinen Bedingungen des Satzes VIIIa), so ist bei genügender Annäherung an die Randkurve oder eine Trennungskurve von ω auf der Fläche ω':

$$\varrho' \frac{\partial W}{\partial \nu'} = \pm 2 \varkappa_P + D(\varrho),$$

$$\varrho' \frac{\partial W}{\partial \nu'} = \pm 2 \Psi_P + D(\varrho),$$

---

*) Bei Trennungskurven von ω muss eine solche Ungleichung für die Sprünge von $\varkappa$ gelten.

wo $\varkappa_P$ den Wert von $\varkappa$ in dem Punkte P der Randkurve vorstellt, dem man sich nähert, resp. Ψ_P den Sprung von $\varkappa$ in dem Punkte P der Trennungskurve, dem man sich nähert; die Vorzeichen + oder — sind entsprechend zu wählen, je nachdem man ν' nach der einen oder anderen Seite positiv rechnet.

Es ist schliefslich von Wichtigkeit, die tangentialen Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial h'}$ in der Nähe der Kurven σ auch dann zu betrachten, wenn man den Winkel θ, den ω und ω' in P bilden, kleiner und kleiner werden läfst.

Es sei zu diesem Zwecke ϱ_0' die kürzeste Entfernung des variabeln Punktes (xyz) von ω, P_0 ihr Fufspunkt auf ω, wir denken uns um P_0 ein Gebiet ω_1 abgegrenzt, von solcher Beschaffenheit, dass der Abstand jedes Punktes des Gebietes $\omega - \omega_1$ von (xyz) gröfser sei als die Länge P, wo:

$$P = a \cdot \varrho_0'^{\,1-\lambda'}, \quad \begin{matrix} (a \text{ endlich}), \\ (0 < \lambda' < 1), \end{matrix}$$

wir können dann bei festem, genügend kleinem ϱ' den Quotienten:

$$\frac{P}{\varrho'} = \frac{a}{\varrho'} \cdot \varrho_0'^{\,1-\lambda'}$$

sowohl, als auch den Quotienten:

$$\frac{\varrho_0'}{P} = \frac{1}{a}\,\varrho_0'^{\,\lambda'}$$

durch genügende Verkleinerung von θ unter jeden beliebigen Kleinheitsgrad herabdrücken.

Nun ist, wenn $\varkappa_0$ der Wert von $\varkappa$ in P_0 ist, nach Zusatz 2 zu VIIb):

$$\varrho' \int\limits_{\omega} \varkappa_0 \frac{\cos(\nu h') - 3\cos(r\nu)\cos(rh')}{r^3}\, d\omega = \Delta(\varrho'),$$

somit:

$$\varrho' \frac{\partial W}{\partial h'} = \varrho' \int\limits_{\omega_1} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(\nu h') - 3\cos(r\nu)\cos(rh')}{r^3}\, d\omega$$

$$+ \varrho' \int\limits_{\omega - \omega_1} (\varkappa - \varkappa_0) \frac{\cos(\nu h') - 3\cos(r\nu)\cos(rh')}{r^3}\, d\omega$$

$$+ \Delta(\varrho');$$

auf ω_1 ist bei genügend kleinem P und $\frac{P}{\varrho'}$:

$$\text{abs.}\,(\varkappa - \varkappa_0) \gtreqless \alpha \cdot P\,\text{abs. Max.}\,\frac{\partial \varkappa}{\partial \mathrm{h}}, \quad (\alpha \text{ endlich}),$$

$$\gtreqless \frac{P}{\varrho'} \cdot A \cdot \varrho'^{\,1-\lambda}, ^{*)} \quad (A \text{ endlich});$$

wir können daher die letzte Gleichung auch so schreiben:

$$\text{a)} \quad \varrho' \frac{\partial \mathrm{W}}{\partial \mathrm{h}'} = \mathrm{J}_1 + \mathrm{J}_2 + \varDelta(\varrho'),$$

wo:

$$\text{b)} \begin{cases} \text{abs. } \mathrm{J}_1 \leqq B \cdot P \cdot \varrho'^{\,1-\lambda} \displaystyle\int_{\omega_1} \frac{d\omega}{\mathrm{r}^3}, \quad (B \text{ endlich}), \\[2ex] \mathrm{J}_2 = \varrho' \displaystyle\int_{\omega - \omega_1} (\varkappa - \varkappa_0)\, \frac{\cos(\nu \mathrm{h}') - 3\cos(\mathrm{r}\nu)\cos(\mathrm{rh}')}{\mathrm{r}^3}\, d\omega. \end{cases}$$

Nun ist identisch, wenn ς die Randkurve von ω_1 ist:

$$\text{c)} \begin{cases} \displaystyle\int_{\omega_1} \frac{d\omega}{\mathrm{r}^3} \equiv 3 \int_{\omega_1} \frac{\cos^2(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^3}\, d\omega + \int_{\omega_1} (\mathrm{f}_{11} + \mathrm{f}_{22} + \mathrm{f}_{33}) \frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2}\, d\omega \\[2ex] \qquad - \displaystyle\int_{\varsigma} \Big[\frac{\cos(\mathrm{ry})\cos(\nu \mathrm{z}) - \cos(\mathrm{rz})\cos(\nu \mathrm{y})}{\mathrm{r}^2} \cos(\sigma \mathrm{x}) \\[2ex] \qquad + \dfrac{\cos(\mathrm{rz})\cos(\nu \mathrm{x}) - \cos(\mathrm{rx})\cos(\nu \mathrm{z})}{\mathrm{r}^2} \cos(\sigma \mathrm{y}) \\[2ex] \qquad + \dfrac{\cos(\mathrm{rx})\cos(\nu \mathrm{y}) - \cos(\mathrm{ry})\cos(\nu \mathrm{x})}{\mathrm{r}^2} \cos(\sigma \mathrm{z}) \Big]\, d\sigma, \end{cases}$$

wie leicht aus dem Stokesschen Theorem (S. 12) folgt, wenn man in demselben:

$$\mathrm{U} = \frac{\cos(\mathrm{ry})\cos(\nu \mathrm{z}) - \cos(\mathrm{rz})\cos(\nu \mathrm{y})}{\mathrm{r}^2},$$

$$\mathrm{V} = \frac{\cos(\mathrm{rz})\cos(\nu \mathrm{x}) - \cos(\mathrm{rx})\cos(\nu \mathrm{z})}{\mathrm{r}^2},$$

$$\mathrm{W} = \frac{\cos(\mathrm{rx})\cos(\nu \mathrm{y}) - \cos(\mathrm{ry})\cos(\nu \mathrm{x})}{\mathrm{r}^2}$$

setzt, und wie früher (vgl. die analoge Untersuchung S. 37):

$$\mathrm{f}_{11} + \mathrm{f}_{22} + \mathrm{f}_{33} \equiv \frac{\partial}{\partial \xi}\Big(\cos(\nu \mathrm{x})\Big) + \frac{\partial}{\partial \eta}\Big(\cos(\nu \mathrm{y})\Big) + \frac{\partial}{\partial \zeta}\Big(\cos(\nu \mathrm{z})\Big)$$

bezeichnet.

---

*) Da:

$$\varrho \frac{\partial \varkappa}{\partial \mathrm{h}} \gtreqless \mathrm{A} \cdot \varrho^{1-\lambda}, \left(\begin{matrix} \mathrm{A} \text{ endlich}, \\ \lambda < 1 \end{matrix} \right)$$

nach Voraussetzung.

Die Formel c) ergiebt uns einmal den allgemeinen Hilfssatz, der uns noch oft von Nutzen sein wird:

Hilfssatz. Das Integral über eine geschlossene stetig gekrümmte Fläche ω:

$$\int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^3}$$

ist bei genügend kleiner kürzester Entfernung ϱ_0' des variabeln Punktes (xyz) von ω seinem absoluten Werte nach

$$\leqq \frac{c}{\varrho_0'},$$

wo c eine endliche, lediglich von der Gestalt der Fläche abhängende Konstante vorstellt.

Es ergiebt sich andererseits aber auch leicht bei Berücksichtigung des Integrales über die Kurve ς bei genügend kleinem P*)

$$\text{d)} \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^3} \leqq \frac{b}{\varrho_0'},$$

wo b eine endliche Konstante vorstellt. Es folgt somit:

$$\text{abs. } J_1 \leqq B \frac{P \cdot \varrho'^{1-\lambda}}{\varrho_0'}, \quad (B \text{ endlich}),$$

$$\leqq C \cdot \frac{\varrho'^{1-\lambda}}{\varrho_0'^{\lambda'}}, \quad (C \text{ endlich}),$$

$$= \frac{D(\varrho')}{\sin^{\lambda'}\theta}, \quad \text{falls } \lambda' < 1-\lambda,$$

eine Annahme, die uns freisteht.

Andererseits ist:

$$\text{abs. } J_2 \leqq c \cdot \varrho' \int\limits_{\omega-\omega_1} \frac{d\omega}{r^3}, \quad (c \text{ endlich}),$$

$$\leqq c \cdot \frac{\varrho'}{P},$$

$$\leqq C \cdot \frac{\varrho'}{\varrho_0'^{1-\lambda'}}, \quad (C \text{ endlich}),$$

$$= \frac{D(\varrho')}{\sin^{1-\lambda'}\theta};$$

es folgt so aus a) bei genügend kleinem θ:

*) Da der absolute Wert des Kurvenintegrales

$$\leqq \text{endl. Konst.} \int\limits_{\varsigma} \frac{d\sigma}{r^2} \leqq \frac{\text{endl. Konst.}}{P}.$$

$$\text{d) abs.}\left[\varrho'\frac{\partial W}{\partial h'}\right] \leqq \frac{\Delta(\varrho')}{\sin^{\Delta}\theta},$$

wo Δ einen echten Bruch vorstellt:

Zusatz 4 zu VIIIa). Verkleinert man bei den Voraussetzungen und Bezeichnungen des Zusatzes 1 zu VIIIa) bei genügend kleinem, festgehaltenen ϱ' den Winkel θ genügend, so besteht die Formel:

$$\text{abs.}\left[\varrho'\frac{\partial W}{\partial h'}\right] \overline{\overline{<}} \frac{\Delta(\varrho')}{\sin^{\lambda}\theta},$$

wo λ einen echten Bruch vorstellt und $\Delta(\varrho')$ von θ unabhängig ist.*)

24 (24) Zum Beweise von VIIIb) bilde man die Ableitung:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_0} = -\int\limits_{\omega} H\,\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega$$

an einem Punkt $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ der Aufsen- oder Innenseite von ω, dann ist wegen der Stetigkeit von H, wie nahe man auch an die Trennungskurven heranrückt:

$$\frac{\partial V}{\partial \nu_0} = -\left|\int\limits_{\omega} H\frac{\cos(r\nu_0)}{r^2}\,d\omega\right|_{(\xi_0\eta_0\zeta_0)} \pm 2\pi H,$$

da man nun in einem endlichen Gebiete um $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$

$$\cos(r\nu_0) = r\cdot f$$

setzen kann, wo f stets endlich ist, folgt die Behauptung nach dem Beweise von VIIc) (S. 94 bis 97).

Der Beweis von Zusatz 1 und 2 von VIIIb) ist genau derselbe, wie der Beweis von Zusatz zu VIIc) (S. 98 bis 103), nur braucht eben der Beweis nicht auf tangentiale Richtungen h′ beschränkt zu werden.

Wenn wir über die tangentialen Ableitungen von V an der Fläche ω bei Annäherung an die Randkurve resp. die Trennungskurven σ etwas aussagen wollen, müssen wir die Voraussetzungen für H etwas enger fassen:

Zusatz 3 zu VIIIb). Ist in dem Flächenpotentiale:

$$V = \int\limits_{\omega} H\frac{d\omega}{r}$$

H auf ω abteilungsweise eindeutig und stetig, sind seine ersten Ableitungen eindeutig und stetig, solange man sich in end-

---

*) Es ist leicht zu übersehen, wie sich der Satz auch auf die Ableitungen $\frac{\partial W}{\partial \nu'}$ ausdehnen lässt, doch werden wir von dieser Ausdehnung in dem vorliegenden Buche keinen Gebrauch zu machen haben.

licher Entfernung von der Randkurve und einer endlichen Zahl von Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen

$$\varrho \frac{\partial H}{\partial \mathrm{h}} = \varDelta(\varrho)$$

erfüllt sind, so sind die tangentialen Ableitungen von V an der Fläche ω in endlicher Entfernung von der Randkurve und den Trennungskurven eindeutig und stetig, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen

$$\varrho \frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{h}} = \varDelta(\varrho)$$

gelten.

Es folgt dies mit Hilfe der Formel 54) S. 42, wenn wir für den Augenblick die Richtung h zur x Axe nehmen:

$$\frac{\partial \mathrm{V}}{\partial \mathrm{h}} = \int\limits_{\sigma} H \frac{\cos(\nu \mathrm{y}) \cos(\sigma \mathrm{z}) - \cos(\nu \mathrm{z}) \cos(\sigma \mathrm{y})}{\mathrm{r}} d\sigma$$

$$+ \int\limits_{\omega} \frac{\frac{\partial H}{\partial \mathrm{h}} - H \cos(\nu \mathrm{h}) (\mathrm{f}_{11} + \mathrm{f}_{22} + \mathrm{f}_{33})}{\mathrm{r}} d\omega$$

$$- \int\limits_{\omega} H \cos(\nu \mathrm{h}) \frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2} d\omega.$$

Dass:

$$\varrho \cdot \int\limits_{\omega} \frac{\frac{\partial H}{\partial \mathrm{h}}}{\mathrm{r}} d\omega = \mathrm{D}(\varrho),$$

folgt entsprechend dem Beweise von VIIc) S. (94 bis 97), andererseits ist:

$$\text{abs. } \varrho \int\limits_{\sigma} H \frac{\cos(\nu \mathrm{y}) \cos(\sigma \mathrm{z}) - \cos(\nu \mathrm{z}) \cos(\sigma \mathrm{y})}{\mathrm{r}} d\sigma \overline{\gtrless} \mathrm{c} \cdot \varrho \int\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{\mathrm{r}}, \text{ (c endlich)}$$

$$\overline{\gtrless} \mathrm{c} \cdot \varrho^{1-\lambda} \int\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{\mathrm{r}^{1-\lambda}},$$

wo λ ein echter Bruch ist, und:

$$\int\limits_{\sigma} \frac{d\sigma}{r^{1-\lambda}} \text{ ist endlich*)},$$

auch wenn man den variabeln Punkt an σ unendlich nahe heranrücken lässt.

Wir sprechen weiter den folgenden Zusatz aus:

Zusatz 4 zu VIIIb). Verkleinert man bei den Bezeichnungen des Zusatzes 2 zu VIIIb) und den Voraussetzungen des Zusatzes 3 zu VIIIb) bei genügend kleinem, festgehaltenen ϱ' den Winkel θ genügend, so besteht die Formel:

$$\text{abs.} \left(\varrho' \frac{\partial V}{\partial h'}\right) < \frac{\varDelta(\varrho')}{\sin^{\lambda}\theta},$$

wo λ einen echten Bruch vorstellt und $\varDelta(\varrho')$ von θ unabhängig ist.

Wir haben hierzu zu beweisen, dass:

$$\text{abs. } \varrho' \int\limits_{\omega} H \frac{\cos(rh')}{r^2} d\omega \leqq \frac{\varDelta(\varrho')}{\sin^{\lambda}\theta} \text{ ist.}$$

Es sei wieder ϱ_0' die kürzeste Entfernung des variabeln Punktes (xyz) von ω, P_0 ihr Fusspunkt auf ω und H_0 der Wert von H in P_0, dann ist:

$$\varrho' \int\limits_{\omega} H_0 \frac{\cos(rh')}{r^2} d\omega = \varDelta(\varrho'),$$

somit:

$$\varrho' \frac{\partial V}{\partial h'} = \varrho' \int\limits_{\omega} (H - H_0) \frac{\cos(rh')}{r^2} d\omega + \varDelta(\varrho'),$$

und nun brauchen wir analog dem Beweise von Zusatz 4 zu VIIIa) nur wieder um P_0 ein Gebiet ω_1 abzugrenzen, von solcher Beschaffenheit, dass der Abstand jedes Punktes des Gebietes $\omega - \omega_1$ von (xyz) gröfser sei als die Länge P, wo:

$$P = a \cdot \varrho_0'^{1-\lambda'} \begin{pmatrix} a \text{ endlich,} \\ 0 < \lambda' < 1 \end{pmatrix}$$

---

*) Es folgt dies leicht mit Hilfe der Identität:

$$\frac{1}{r^{1-\lambda}} \equiv \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(r^{\lambda}\cos(r\sigma)\right) + (1-\lambda)\frac{\cos^2(r\sigma)}{r^{1-\lambda}};$$

da nemlich $\cos(r\sigma)$ von dem Punkte der Kurve, dem man sich nähert, an resp. nach jeder Seite der Kurve bis zu einer endlichen Entfernung dasselbe Zeichen hat, so kann man auf diesen Kurventeilen

$$\frac{\cos^2(r\sigma)}{r^{1-\lambda}} \leqq \underset{(-)}{+} \frac{1}{\lambda} \frac{\partial(r^{\lambda})}{\partial\sigma}$$

setzen, und man erhält bei der Integration lauter endliche Gröfsen.

dann gelangen wir in analoger Weise, wie dort, zum Beweise unseres Zusatzes 4 zu VIII b).

Der Satz VIII b) lässt noch eine Erweiterung auf den Fall zu, dass H sich aus 2 Funktionen zusammensetzt:

$$H = H_0 + H_1,$$

von denen H_0 die Voraussetzungen des Satzes VIII b) erfüllt, während H_1 überall auf ω eindeutig und stetig sein soll, so lange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl vereinzelter Punkte $P_1\, P_2 \ldots P_n$ auf der Randkurve oder den Trennungskurven von ω hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \cdot H_1 = a_j + \varDelta(\varrho), \text{ (}a_j\text{ endlich)}$$

bestehen sollen.

Es gilt die folgende

Erweiterung des Satzes VIII b). Setzt sich die Funktion H aus zwei Funktionen H_0 und H_1 zusammen, von denen die erste die Voraussetzungen des Satzes VIII b) erfüllt; ist ferner H_1 auf ω in endlicher Entfernung von vereinzelten Punkten $P_1\, P_2 \ldots P_n$ der Fläche ω eindeutig und stetig, während bei genügender Annäherung an dieselben Relationen von der Form

$$\varrho \cdot H_1 = a_j + \varDelta(\varrho), \quad \text{(}a_j\text{ endlich)}$$

bestehen, so setzen sich die normalen Ableitungen $\frac{\partial V}{\partial \nu}$ aus zwei Teilen $\frac{\partial V_0}{\partial \nu}$ und $\frac{\partial V_1}{\partial \nu}$ zusammen, von denen die ersteren die Eigenschaften der H_0, die letzteren die Eigenschaften der H_1 haben.

Der Beweis für $\frac{\partial V_0}{\partial \nu}$ ist derselbe, wie vorher, analog dem Beweise von VII c) (S. 94 bis 97); ferner ist in jener Betrachtung zum Beweise, dass bei genügender Annäherung an die Punkte P_j:

$$\varrho \frac{\partial V_1}{\partial \nu} = A_j + D(\varrho), \quad \text{(}A_j\text{ endlich)}$$

lediglich in Fig. 41 als Grenzkurve der Gebiete 1 und 2 ein Kreisbogen mit dem Radius $\frac{\varrho_0}{2}$ um P_j als Centrum zu nehmen.

Wir wollen an dieser Stelle einige Sätze einschalten, welche teilweise Erweiterungen einiger Sätze des I. Teiles darstellen und jedenfalls ihrem Sinne nach zu dem I. Teile gehören, Sätze, von denen wir in Teil IV und V mehrfach Gebrauch machen werden.

Wir sprechen zunächst die folgende Definition aus:

Definition. Eine Funktion f der Stelle $(\xi\eta\zeta)$ auf der Fläche ω wollen wir als regulär bezeichnen, wenn für irgend zwei Punkte $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ und $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ der Fläche, welche eine genügend kleine Entfernung r_{12} haben, die Relation gilt:

$$\text{abs.}(f_2-f_1)\equiv \text{abs.}[f(\xi_2\eta_2\zeta_2)-f(\xi_1\eta_1\zeta_1)] \overline{\overline{<}} A\cdot r_{12}{}^{1-\lambda},$$

wo A eine endliche Konstante ist und

$$\lambda<1 \text{ (in strengem Sinne)}.$$

Wir können bei dieser Definition die folgenden Sätze aussprechen:

Satz 1. Jedes Flächenpotential:

$$V=\int\limits_{\omega} H\frac{d\omega}{r}$$

ist, auch wenn man über H lediglich die Voraussetzung der Endlichkeit macht, auf ω regulär, und zwar ist bei genügend kleinem r_{12}:

$$\text{abs.}(V_2-V_1) \overline{\overline{<}} C\cdot \text{abs. Max. } H\cdot r_{12}{}^{1-\lambda}, \begin{pmatrix}C \text{ endlich,}\\ \lambda<1\end{pmatrix}$$

wo C und λ von der Funktion H völlig unabhängig sind und lediglich von der Gestalt der Fläche ω abhängen.

Wir denken uns zum Beweise um den Mittelpunkt O der Graden $(\xi_1\eta_1\zeta_1)-(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ eine Kugel mit dem Radius

$$P=a\cdot r_{12}{}^{\lambda'}, \begin{pmatrix}0<\lambda'<1,\\ a \text{ endlich}\end{pmatrix}$$

die ω in der Kurve ς schneidet und in einen $(\xi_1\eta_1\zeta_1)$ und $(\xi_2\eta_2\zeta_2)$ enthaltenden Teil ω_1 und einen Teil $\omega-\omega_1$ zerlegt. Dann ist der von $\omega-\omega_1$ herrührende Teil der Differenz V_2-V_1 seinem absoluten Werte nach

$$\overline{\overline{<}}\ b\cdot \text{abs. Max. } H\cdot\frac{r_{12}}{P}, \quad (\text{b endlich}),$$

$$\overline{\overline{<}}\ B\cdot \text{abs. Max. } H\cdot r_{12}{}^{1-\lambda'}, \quad (\text{B endlich});$$

der von ω_1 herrührende Teil ist seinem absoluten Werte nach

$$\overline{\overline{<}}\ 2\int\limits_{\omega_1} H\frac{d\omega}{r},$$

$$\overline{\overline{<}}\ 2 \text{ abs. Max. } H\int\limits_{\omega_1}\frac{d\omega}{r},$$

$$\overline{\overline{<}}\ c\cdot \text{abs. Max. } H\cdot P, \quad (\text{c endlich})$$

nach Formel 46) oder 47) des I. Teiles S. 38 und 39, also

$$\overline{\overline{<}}\ a \cdot c \cdot \text{abs. Max. } H \cdot r_{12}{}^{\lambda'},$$

$$\text{abs.}(V_2 - V_1) < C \cdot \text{abs. Max. } H \cdot r_{12}{}^{1-\lambda}, \quad \begin{pmatrix} C \text{ endlich,} \\ \lambda < 1 \end{pmatrix}$$

wo C und λ lediglich von der Gestalt der Fläche abhängen.

Satz 2a. Ist H auf einem stetig gekrümmten Flächenstücke ω eindeutig und stetig, so sind die normalen Ableitungen

$$\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{\omega} = \frac{1}{2}\left[\left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{a} + \left|\frac{\partial V}{\partial \nu}\right|_{i}\right]$$

des Flächenpotentiales:

$$V = \int_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

auf der Fläche selbst reguläre Funktionen der Stelle auf ω, und zwar ist die absolute Differenz ihrer Werte in zwei Punkten mit genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{\overline{<}}\ c \cdot \text{abs. Max. } H \cdot r_{12}{}^{1-\lambda'}, \quad \begin{pmatrix} c \text{ endlich,} \\ \lambda' < 1 \end{pmatrix}$$

wo c und λ' von der Funktion H völlig unabhängig sind und lediglich von der Gestalt des Flächenstückes ω abhängen.

Satz 2b. Ist $\varkappa$ auf einem stetig gekrümmten Flächenstücke ω eindeutig und stetig, so sind die Werte des Flächenintegrales:

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

auf der Fläche selbst reguläre Funktionen der Stelle auf ω und zwar ist die absolute Differenz ihrer Werte in zwe Punkten mit genügend kleiner Entfernung r_{12}

$$\overline{\overline{<}}\ \gamma \cdot \text{abs. Max. } \varkappa \cdot r_{12}{}^{1-\lambda'}, \quad \begin{pmatrix} \gamma \text{ endlich,} \\ \lambda' < 1 \end{pmatrix}$$

wo γ und λ' von der Funktion $\varkappa$ völlig unabhängig sind und lediglich von der Gestalt des Flächenstückes ω abhängen.

Beide Sätze folgen unmittelbar aus Satz 1, wenn man bedenkt, dass um jeden Punkt $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ von ω ein endliches Flächenstück abgegrenzt werden kann, in dem sowohl:

$$\cos(r\nu_0) = r \cdot f,$$

als auch:

$$\cos(r\nu) = r \cdot F$$

wo f und F endlich sind.

Satz 3a. Ist H auf der geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω regulär, so dass bei genügend kleinem r_{12}:

$$\text{abs.}(H_2 - H_1) \overline{\overline{<}} A \cdot r_{12}^{1-\lambda'}, \quad \begin{pmatrix} A \text{ endlich,} \\ \lambda' < 1 \end{pmatrix}$$

wo A und λ' von der Lage der Punkte auf der Fläche unabhängig sein sollen, so ist für einen Punkt (xyz) der Normalen ν_0 in irgend einem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ der Fläche bei genügend kleiner Entfernung ϱ_0' von $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$:

$$\varrho_0' \frac{\partial^2}{\partial h \, \partial \nu_0} \int_\omega H \frac{d\omega}{r} \overline{\overline{<}} (c_1 A + c_2 \text{ abs. Max. } H) \, \varrho_0'^{\,1-\lambda''},$$

wo c_1 c_2 zwei endliche Konstanten vorstellen, die lediglich von der Gestalt der Fläche abhängen,

$$\lambda'' = \frac{1}{2-\lambda'}$$

und h eine ganz beliebige Richtung ist.

Grenzen wir nemlich um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ einen Flächenteil ω_1 ab von solcher Beschaffenheit, dass die Entfernung jedes Punktes von $(\omega - \omega_1)$ gröfser ist als die Länge P, wo:

$$P = \varrho_0'^{\,\frac{1}{2-\lambda'}},$$

so kann

$$\frac{\varrho_0'}{P} = \varrho_0'^{\,\frac{1-\lambda'}{2-\lambda'}},$$

ebenso wie P durch Verkleinerung von ϱ_0' beliebig klein gemacht werden. Es ist somit bei genügend kleinem ϱ_0' nach dem Hilfssatze im Beweise von Zusatz 4 zu VIIIa (S. 383) der von ω_1 herrührende Teil des Ausdruckes:

$$\varrho_0' \frac{\partial^2}{\partial h \, \partial \nu_0} \int_\omega (H - H_0)^{*)} \frac{d\omega}{r} \equiv \varrho_0' \int_\omega (H - H_0) \frac{3 \cos(r\nu_0) \, \cos(rh) - \cos(\nu_0 h)}{r^3} \, d\omega$$

seinem absoluten Werte nach:

$$\begin{aligned} &\overline{\overline{<}} \varrho_0' \text{ abs. Max. } (H - H_0) \; c_1 \frac{1}{\varrho_0'}, \\ &\overline{\overline{<}} c_1 A P^{1-\lambda'}, \qquad\qquad (A \text{ endlich}) \\ &\overline{\overline{<}} c_1 A \varrho_0'^{\,1-\frac{1}{2-\lambda'}}, \end{aligned}$$

der von $\omega - \omega_1$ herrührende Teil desselben Ausdruckes ist seinem absoluten Werte nach

---

*) $H_0 = H(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$.

$$\overline{\overline{<}}\ \varrho_0' \text{ abs. Max. } H \cdot c_3 \cdot \frac{1}{P},$$

$$\overline{\overline{<}}\ c_3 \text{ abs. Max. } H \cdot \varrho_0'^{\,1-\frac{1}{2-\lambda'}},$$

es bleibt somit lediglich zu beweisen, dass bei genügend kleinem ϱ_0':

$$J \equiv \text{abs. } \varrho_0' \int\limits_{\omega} \frac{3\cos(r\nu_0)\cos(rh) - \cos(\nu_0 h)}{r^3}\, d\omega\ \overline{\overline{<}}\ c_4\, \varrho_0'^{\,1-\frac{1}{2-\lambda'}}.$$

Nun ist:

$$\int\limits_{\omega} \frac{3\cos(r\nu)\cos(rh) - \cos(\nu h)}{r^3}\, d\omega \equiv 0,$$

und es ist für ω_1:

$$\cos(r\nu_0) = \cos(r\nu) + \varrho \cdot f,$$
$$\cos(\nu_0 h) = \cos(\nu h) + \varrho \cdot F,$$

wo ϱ die Entfernung von $d\omega$ nach $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ und f, F endliche Funktionen vorstellen. Es ist somit

$$J\ \overline{\overline{<}}\ c_5\, \varrho_0'\, P \int\limits_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^3} + c_6\, \varrho_0' \int\limits_{\omega - \omega_1} \frac{d\omega}{r^3},$$

$$\overline{\overline{<}}\ c_7\, P + c_8\, \frac{\varrho_0'}{P},$$

$$\overline{\overline{<}}\ c_7\, \varrho_0'^{\,\frac{1}{2-\lambda'}} + c_8\, \varrho_0'^{\,1-\frac{1}{2-\lambda'}},$$

$$\overline{\overline{<}}\ c_4\, \varrho_0'^{\,1-\frac{1}{2-\lambda'}},$$

wenn $c_4 = c_7 + c_8$, da

$$\varrho_0'^{\,\frac{1}{2-\lambda'}} < \varrho_0'^{\,1-\frac{1}{2-\lambda'}},$$

es ergiebt sich so die Behauptung, wenn man noch

$$c_2 = c_3 + c_4$$

setzt.

Diese Untersuchung beweist zugleich den Satz

3b. Ist $\varkappa$ auf der geschlossenen, stetig gekrümmten Fläche ω regulär, so ist bei genügend kleiner Entfernung ϱ_0' des variabeln Punktes (xyz) von ω:

$$\varrho_0' \frac{\partial}{\partial h} \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2}\, d\omega = \Delta(\varrho_0'),$$

wo h eine beliebige Richtung vorstellt.

Wir werden auch zeigen, dass wir mit Hilfe derselben auch den folgenden Satz aussprechen können.

Erweiterung des Satzes Vb). (S. 43). Der Satz Vb) ist für geschlossene,*) stetig gekrümmte Flächen noch gültig, wenn wir von H lediglich Regularität auf ω voraussetzen, ohne dass wir über die Ableitungen von H irgend welche Annahmen zu machen brauchen.

Die Stetigkeit der ersten Ableitungen folgt auch bei unendlicher Annäherung an ω aus 3a, da nach diesem Satze bei genügend kleinem ϱ_0' die Ableitung an ω in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$:

$$\frac{\partial V}{\partial h} = \left|\frac{\partial V}{\partial h}\right|_{(x\,y\,z)} + \Delta(\varrho_0')$$

ist. Zum Beweise der Formeln 56) (S. 44) grenzen wir um $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ ein endliches Gebiet ω_1 ab, so dass in demselben:

$$H - H_0 \overline{\overline{<}}\, A \cdot \varrho^{1-\lambda}, \quad \begin{pmatrix} A \text{ endlich,} \\ \lambda < 1 \end{pmatrix}$$

wo ϱ die Entfernung $(\xi \eta \zeta) - (\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ vorstellt, dann brauchen wir nur zu beweisen, dass das Integral:

$$J \equiv \frac{\partial}{\partial h} \int_{\omega_1} \frac{H - H_0}{r}\, d\omega \equiv \int_{\omega_1} (H_0 - H)\, \frac{\cos(rh)}{r^2}\, d\omega$$

zu null konvergiert, wenn wir ω_1 immer kleiner und kleiner machen. Es ist:

$$\text{abs. } J \overline{\overline{<}}\, A \cdot \int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}}.$$

Nun folgt, wenn ς die Grenzkurve von ω_1 ist, $(\lambda \neq 1)$:

$$\int_{\omega_1} \frac{d\omega}{r^{1+\lambda}} \equiv -\int_{\omega_1} \left[\frac{f_{11} + f_{22} + f_{33}}{1-\lambda}\, \frac{\cos(r\nu)}{r^\lambda} + \frac{1+\lambda}{1-\lambda}\, \frac{\cos^2(r\nu)}{r^{1+\lambda}} \right] d\omega$$

$$+ \frac{1}{1-\lambda} \int_{\varsigma} \left[\frac{\cos(ry)\cos(\nu z) - \cos(rz)\cos(\nu y)}{r^\lambda} \cos(\sigma x) \right.$$

$$+ \frac{\cos(rz)\cos(\nu x) - \cos(rx)\cos(\nu z)}{r^\lambda} \cos(\sigma y)$$

$$\left. + \frac{\cos(rx)\cos(\nu y) - \cos(ry)\cos(\nu x)}{r^\lambda} \cos(\sigma z) \right] d\sigma$$

aus dem Stokesschen Theoreme, wenn man in demselben:

---

*) Der Satz gilt in gleicher Weise für stetig gekrümmte Flächenstücke ω, wenn H in endlicher Entfernung von der Randkurve resp. den Trennungskurven regulär ist.

$$U = \frac{\cos(ry)\cos(\nu z) - \cos(rz)\cos(\nu y)}{r^\lambda},$$

$$V = \frac{\cos(rz)\cos(\nu x) - \cos(rx)\cos(\nu z)}{r^\lambda}$$

$$W = \frac{\cos(rx)\cos(\nu y) - \cos(ry)\cos(\nu x)}{r^\lambda}$$

setzt. Es folgt nunmehr, dass J durch Verkleinerung von ω_1 unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann, mit Rücksicht auf IVa) des I. Teiles und darauf, dass:

$$\lim \int\limits_{\varsigma} \frac{d\sigma}{r^\lambda} = 0.^{*)}$$

Die Sätze 2a und 2b gestatten uns die beiden Folgerungen:

4a. Ist H auf einem stetig gekrümmten Flächenteile ω regulär, so gilt gleiches für die normalen**) Ableitungen des Flächenpotentiales:

$$V = \int\limits_{\omega} H \frac{d\omega}{r}$$

zu beiden Seiten der Fläche.

4b. Ist $\varkappa$ auf einem stetig gekrümmten Flächenteile ω regulär, so gilt gleiches für die Werte des Flächenintegrales

$$W = \int\limits_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

zu beiden Seiten der Fläche.

Wenn wir von einer Funktion f der Stelle auf dem stetig gekrümmten Flächenstücke ω sagen, dass sie regulär ist, solange man sich in endlicher Entfernung von der Trennungskurve hält, so soll eine Relation:

$$\text{abs.}\,(f_2 - f_1) \overline{\overline{<}}\, A\, r_{12}^{\,1-\lambda}$$

bestehen, wo A endlich, $\lambda < 1$ ist, wenn man sich in irgend welcher (im übrigen beliebig kleiner) Entfernung von der Randkurve hält; bei unend-

---

*) Man wähle ς so, dass seine Projektion auf die Tangentialebene in $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$ ein Kreis (R) sei, dann ist in $(\xi_0\eta_0\zeta_0)$:

$$\int\limits_{\varsigma} \frac{d\sigma}{r^\lambda} \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.} \int\limits_{(R)} \frac{d\sigma}{r^\lambda}\left(= \text{endl. Konst. } \frac{2\pi}{2-\lambda} R^{2-\lambda}\right).$$

**) Für die Regularität der tangentialen Ableitungen (in endlicher Entfernung von der Randkurve) ist Regularität der ersten Ableitungen von H hinreichend, wie aus Formel 54) (S. 42) mit Hilfe von Satz 1 und 4b folgt.

licher Annäherung an dieselbe darf aber nach Belieben A unendlich wachsen, die Grenze, unter der r_{12} liegen soll, zu null konvergieren.

Bei dieser Ausdrucksweise können wir die beiden folgenden Sätze aussprechen:

5a. Ist $\varkappa$ auf einem stetig gekrümmten Flächenteile ω eindeutig und stetig und sind seine ersten Ableitungen regulär, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve hält, so sind die ersten Ableitungen des Flächenintegrales

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

bei Vermeidung der Fläche ω selbst und in endlicher Entfernung von der Randkurve für jeden Punkt (xyz) des Raumes eindeutig und stetig, der auch von der einen oder anderen Seite unendlich nahe an die Fläche herantreten kann. Es gelten ferner an der Fläche ω, wie nahe man auch an die Randkurve herantreten mag, die Relationen:

$$\left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{-} - \left|\frac{\partial W}{\partial x}\right|_{+} = -4\pi \frac{\partial \varkappa}{\partial \xi},$$
$$\left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{-} - \left|\frac{\partial W}{\partial y}\right|_{+} = -4\pi \frac{\partial \varkappa}{\partial \eta}, \quad \left|\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{-} = \left|\frac{\partial W}{\partial \nu}\right|_{+}.$$
$$\left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{-} - \left|\frac{\partial W}{\partial z}\right|_{+} = -4\pi \frac{\partial \varkappa}{\partial \zeta},$$

Das folgt aus der Formel 59) S. 46 mit Hilfe der Erweiterung des Satzes Vb. (S. 392); in gleicher Weise folgt:

5b. Ist auf einem stetig gekrümmten Flächenstücke ω $\varkappa$ eindeutig und stetig, und sind seine ersten Ableitungen regulär, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve hält, so sind auch die tangentialen Ableitungen des Flächenintegrales

$$W = \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

zu beiden Seiten von ω regulär, solange man sich in endlicher Entfernung von der Randkurve hält,

aus Formel 59) S. 46 mit Hilfe von Satz 1 und 4b.

Den Satz 5a kann man für geschlossene, stetig gekrümmte Flächen auch in folgender Form aussprechen:

Erweiterung von IVc. (S. 48) Der Satz IVc ist für geschlossene stetig gekrümmte Flächen noch gültig, wenn man von den ersten Ableitungen von $\varkappa$ lediglich Regularität voraussetzt, ohne dass wir über die zweiten Ableitungen von $\varkappa$ irgend welche Annahmen zu machen brauchen.

Man wird nach diesen Erweiterungen von Vb) und IVc) des I. Teiles auch die Sätze VIa) und VIb) des III. Teiles (S. 192 und 196) dahin erweitern können, dass für VIa) bereits die Regularität von H auf ω, für VIb) bereits die Regularität der ersten Ableitungen von $\varkappa$ auf ω hinreichend ist.

[Es sei beiläufig bemerkt, dass man in ähnlicher Weise auch die Sätze VIc) VId) des I. Teiles über Raumpotentiale erweitern kann:

Erweiterung von VIc) und VId), Die Sätze VIc) und VId) des I. Teiles (S. 63 und 66) sind auch dann noch gültig, wenn man die Funktion E in dem Raume τ lediglich als regulär voraussetzt, ohne über ihre ersten Ableitungen irgend welche Voraussetzungen zu machen.

Mann wird dabei E in dem Raume τ regulär nennen, wenn für 2 Punkte $(\xi_1 \eta_1 \zeta_1)$ und $(\xi_2 \eta_2 \zeta_2)$ desselben bei genügend kleiner Entfernung r_{12}:

$$\text{abs.}\,(E_2 - E_1) \lesseqgtr A\, r_{12}^{\,1-\lambda},\ (A \text{ endlich}, \lambda < 1).]$$

(25) Es ist: **25**

$$\cos m\,\theta_1 = \frac{e^{i m \theta_1} + e^{-i m \theta_1}}{2} = \frac{1}{2}\Big\{ (e^{i\theta_1} + e^{-i\theta_1})^m$$

$$+ a_2 \left(e^{i(m-2)\theta_1} + e^{-i(m-2)\theta_1}\right) + a_4 \left(e^{i(m-4)\theta_1} + e^{-i(m-4)\theta_1}\right) + \ldots \Big\},$$

wo i für den Augenblick die imaginäre Einheit, $a_2\, a_4 \ldots$ gewisse Zahlenfaktoren sind, oder:

$$\cos m\,\theta_1 = 2^{m-1} \cos^m \theta_1 + \alpha_2 \cos^{m-2}\theta_1 + \alpha_4 \cos^{m-4}\theta_1 + \ldots,$$

wo wiederum $\alpha_2\, \alpha_4 \ldots$, gewisse Zahlenfaktoren sind, da sich successive auf die Ausdrücke:

$$e^{i(m-2)\theta_1} + e^{-i(m-2)\theta_1},\ e^{i(m-4)\theta_1} + e^{-i(m-4)\theta_1},\ \ldots$$

genau analoge Betrachtungen anwenden lassen.

(26) Es ist: **26**

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{P_{ni}}{(\sqrt{1-x^2})^i}\right] = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^i}\left(\frac{dP_{ni}}{dx} + i\,\frac{x}{1-x^2}P_{ni}\right),$$

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[\frac{P_{ni}}{(\sqrt{1-x^2})^i}\right] = \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^i}\left\{\frac{d^2P_{ni}}{dx^2} + i\,\frac{x}{1-x^2}\,\frac{dP_{ni}}{dx} + i\,\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}P_{ni}\right\}$$

$$+ i\,\frac{x}{(\sqrt{1-x^2})^{i+2}}\left\{\frac{dP_{ni}}{dx} + i\,\frac{x}{1-x^2}P_{ni}\right\},$$

$$= \frac{1}{(\sqrt{1-x^2})^i}\left\{\frac{d^2P_{ni}}{dx^2} + 2i\,\frac{x}{1-x^2}\,\frac{dP_{ni}}{dx} + \frac{i^2x^2 + i(1+x^2)}{(1-x^2)^2}P_{ni}\right\};$$

hiernach wird die Differentialgleichung für P_{ni}, wenn man noch mit $(\sqrt{1-x^2})^i$ multipliziert:

$$(n-i)(n+i+1)\,P_{ni} - (2i+2)\,x\left\{\frac{dP_{ni}}{dx} + i\,\frac{x}{1-x^2}\,P_{ni}\right\}$$

$$+(1-x^2)\left\{\frac{d^2P_{ni}}{dx^2} + 2i\,\frac{x}{1-x^2}\,\frac{dP_{ni}}{dx} + \frac{i^2x^2+i(1+x^2)}{(1-x^2)^2}\,P_{ni}\right\} = 0$$

oder:

$$\left(n(n+1) - \frac{i^2}{1-x^2}\right)P_{ni} - 2x\,\frac{dP_{ni}}{dx} + (1-x^2)\,\frac{d^2P_{ni}}{dx^2} = 0.$$

27 (27) Die Formeln 73) folgen, wenn man die Formeln:

$$\cos j\varphi \sin s\varphi = \frac{1}{2}\Big[\sin(j+s)\varphi - \sin(j-s)\varphi\Big],$$

$$\cos j\varphi \cos s\varphi = \frac{1}{2}\Big[\cos(j+s)\varphi + \cos(j-s)\varphi\Big],$$

$$\sin j\varphi \sin s\varphi = \frac{1}{2}\Big[\cos(j-s)\varphi - \cos(j+s)\varphi\Big]$$

nach φ zwischen den Grenzen 0 und 2π integriert.

28 (28) Es ist nach Anm. (26):

$$\cos^m\theta = \frac{1}{2^{m-1}}\Big[\cos m\theta - \alpha_2\cos^{m-2}\theta - \alpha_4\cos^{m-4}\theta - \ldots\Big];$$

indem man auf $\cos^{m-2}\theta$, $\cos^{m-4}\theta$, ... gleiche Formeln anwendet, folgt die Behauptung im Text.

29 (29) Es ist:

$$\frac{\partial P_n\big(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\big)}{\partial\mu} = \frac{\nu\mu_1-\mu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)}{\nu}\,P_n'\big(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\big),$$

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\left[(1-\mu^2)\,\frac{\partial P_n\big(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\big)}{\partial\mu}\right]$$

$$=\Big[\nu\mu_1-\mu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\Big]^2 P_n''\big(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\big)$$

$$-\left(2\mu\mu_1+\left\{\nu\nu_1-\frac{\mu^2\nu_1}{\nu}\right\}\cos(\varphi-\varphi_1)\,P_n'\big(\mu\mu_1+\nu\nu_1\cos(\varphi-\varphi_1)\big)\right),$$

ferner:

$$\frac{\partial P_n\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)}{\partial \varphi} = -\nu\nu_1 \sin(\varphi - \varphi_1)\, P_n'\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$\frac{\partial^2 P_n\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)}{\partial \varphi^2} = \nu^2\nu_1^2 \sin^2(\varphi - \varphi_1)\, P_n''\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$- \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\, P_n'\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

der Ausdruck links in 81) ist somit:

$$\equiv n(n+1)\, P_n\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$- \left[2\,\mu\mu_1 + \left(\nu\nu_1 - \frac{\mu^2\nu_1}{\nu} + \frac{\nu_1}{\nu}\right)\cos(\varphi - \varphi_1)\right] P_n'\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$+ \left[\Big(\nu\mu_1 - \mu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)^2 + \nu_1^2 \sin^2(\varphi - \varphi_1)\right] P_n''\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$\equiv n(n+1)\, P_n\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$- 2\Big[\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big] P_n'\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big)$$

$$+ \left[1 - \Big\{\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big\}^2\right] P_n''\Big(\mu\mu_1 + \nu\nu_1 \cos(\varphi - \varphi_1)\Big).$$

(30) Es ist, wenn wir, wie vorher: **30**

$$\nu^2 = 1 - \mu^2$$

setzen:

$$\frac{\partial}{\partial \mu}(\nu^i f_{ni}) = \nu^i \frac{\partial f_{ni}}{\partial \mu} - i\,\mu\,\nu^{i-2} f_{ni},$$

$$\frac{\partial}{\partial \mu}\left[\nu^2 \frac{\partial}{\partial \mu}(\nu^i f_{ni})\right] = \nu^{i+2}\frac{\partial^2 f_{ni}}{\partial \mu^2} - \Big\{(i+2)\,\mu\,\nu^i + i\,\mu\,\nu^i\Big\}\frac{\partial f_{ni}}{\partial \mu}$$

$$+ (i^2 \mu^2 \nu^{i-2} - i\,\nu^i)\, f_{ni},$$

$$= \nu^i \Big\{(1 - \mu^2)\frac{\partial^2 f_{ni}}{\partial \mu^2} - (2i+2)\,\mu\,\frac{\partial f_{ni}}{\partial \mu}$$

$$- i(i+1)\, f_{ni}\Big\} + i^2 \nu^{i-2} f_{ni}.$$

Es wird somit:

$$n(n+1)\,\nu^i f_{ni} + \frac{\partial}{\partial \mu}\left[\nu^2 \frac{\partial}{\partial \mu}(\nu^i f_{ni})\right] - i^2 \nu^{i-2} f_{ni}$$

$$\equiv \nu^i \left\{\Big[n(n+1) - i(i+1)\Big] f_{ni} - (2i+2)\,\mu\,\frac{\partial f_{ni}}{\partial \mu} + (1 - \mu^2)\frac{\partial^2 f_{ni}}{\partial \mu^2}\right\},$$

und hieraus folgt die Behauptung im Text.

(31) Es ist, wenn wir für den Augenblick unter i die imaginäre Einheit verstehen: **31**

$$(1+\cos x)^n = \frac{1}{2^n}\left\{e^{i\frac{x}{2}} + e^{-i\frac{x}{2}}\right\}^{2n}$$

$$= \frac{1}{2^n}\left\{2\cos nx + 2\frac{2n}{1}\cos(n-1)x + 2\frac{2n(2n-1)}{1\cdot 2}\cos(n-2)x + \cdots \right.$$

$$\left. + 2\frac{2n(2n-1)\ldots(n+2)}{1\cdot 2\ldots(n-1)}\cos x + \frac{2n(2n-1)\ldots(n+1)}{1\cdot 2\ldots n}\right\},$$

$$= \frac{1}{2^n}\frac{\Pi(2n)}{(\Pi(n))^2}\left\{1 + 2\frac{n}{n+1}\cos x + 2\frac{n(n-1)}{(n+1)(n+2)}\cos 2x + \cdots \right.$$

$$\left. + 2\frac{n(n-1)\ldots 2\cdot 1}{(n+1)(n+2)\ldots 2n}\cos nx\right\},$$

$$= \frac{1}{2^n}\frac{\Pi(2n)}{(\Pi(n))^2}\left\{1 + 2\sum_1^n{}^j \frac{(\Pi(n))^2}{\Pi(n-j)\,\Pi(n+j)}\cos jx\right\}.$$

32 (32) Es ist:

$$\text{abs.}\int_{a_{j-1}}^{a_j}[\Phi(x)-\Phi(b_j)]\,dx \mathrel{\substack{=\\<}} G_{a_{j-1}\,a_j}(a_j - a_{j-1}),$$

wenn wir unter $G_{a_{j-1}\,a_j}$ den absolut gröfsten Wert von $\Phi(x)-\Phi(b_j)$ im Intervalle $a_{j-1}\,a_j$ verstehen, somit:

$$\text{abs.}\sum_1^n{}^j F(b_j)\int_{a_{j-1}}^{a_j}[\Phi(x)-\Phi(b_j)]\,dx \mathrel{\substack{=\\<}} \text{abs. Max. } F\cdot\sum_1^n{}^j G_{a_{j-1}\,a_j}(a_j - a_{j-1})$$

$$\mathrel{\substack{=\\<}} \text{abs. Max. } F\cdot G\cdot(x_2 - x_1),$$

wenn G das gröfste $G_{a_{j-1}\,a_j}$ ist; die linke Seite lässt sich daher durch Vergröfserung von n und Verkleinerung der Intervalle $a_{j-1}\,a_j$ unter jeden Kleinheitsgrad herabdrücken.

33 (33) Es ist in 123):

$$M = \frac{\lim\limits_{n=\infty}\sum_1^n{}^j [F(b_j)-F(b_{j-1})]\int_{a_{j-1}}^{x_2}\Phi(x)\,dx}{\lim\limits_{n=\infty}\sum_1^n{}^j [F(b_j)-F(b_{j-1})]},$$

somit, wenn wir den gröfsten Wert von

$$\int_{a_{j-1}}^{x_2}\Phi(x)\,dx$$

mit G, den kleinsten mit K bezeichnen:

$$K \overline{\overline{<}} M \overline{\overline{<}} G.$$

Ist:

$$K = \int_{\alpha}^{x_2} \Phi(x)\,dx, \quad G = \int_{\beta}^{x_2} \Phi(x)\,dx, \quad \begin{pmatrix} x_1 \overline{\overline{<}} \alpha \overline{\overline{<}} x_2, \\ x_1 \overline{\overline{<}} \beta \overline{\overline{<}} x_2 \end{pmatrix},$$

so folgt, da die Funktion:

$$\Psi(x) = \int_{x}^{x_2} \Phi(x)\,dx$$

im Intervalle $x_1\,x_2$, also auch im Intervalle $\alpha\,\beta$ eindeutig und stetig ist, dass M in der Reihe der Werte liegen muss, welche Ψ im Intervalle $\alpha\,\beta$ hat:

$$M = \Psi(\varrho), \; (\alpha \lesseqgtr \varrho \lesseqgtr \beta).$$

Es folgt also jedenfalls:

$$M = \int_{\varrho}^{x_2} \Phi(x)\,dx, \; (x_1 \overline{\overline{<}} \varrho \overline{\overline{<}} x_2).$$

(34) Dass die Formel 135) wirklich eine Entwickelung nach allgemeinen Kugelfunktionen darstellt, geht daraus hervor, dass wir: **34**

$$P_n(\cos\gamma) = P_{n\,o}(\mu)\,P_{n\,o}(\mu_1) + \sum_{1}^{n}{}_i\; 2\,\frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)}\,P_{n\,i}(\mu)\,P_{n\,i}(\mu_1)\cos i(\varphi-\varphi_1)$$

setzen können und die Formel 135) die Gestalt erhält:

$$f(\theta_1, \varphi_1) = \sum_{0}^{\infty}{}_n \left[A_{n\,o}\,P_{n\,o}(\mu_1) + \sum_{1}^{n}{}_i\; P_{n\,i}(\mu_1) \left\{ A_{n\,i}\cos i\varphi_1 + B_{n\,i}\sin i\varphi_1 \right\} \right],$$

wo:

$$A_{n\,0} = \frac{2n+1}{4\pi} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(\theta,\varphi)\;P_n(\mu)\,d\mu\,d\varphi,$$

$$\left.\begin{aligned} A_{n\,i} &= \frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(\theta,\varphi)\;P_{n\,i}(\mu)\cos i\varphi\;d\mu\,d\varphi, \\ B_{n\,i} &= \frac{2n+1}{2\pi}\,\frac{\Pi(n-i)}{\Pi(n+i)} \int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} f(\theta,\varphi)\;P_{n\,i}(\mu)\sin i\varphi\;d\mu\,d\varphi, \end{aligned}\right\}\; i = 1, 2 \ldots$$

35 (35) Der Punkt $\mu' = 1$ ist der Schnittpunkt der positiven x' Axe mit der Kugel, also der Punkt (θ_1, φ_1) in dem ursprünglichen Koordinatensystem; der Punkt $\mu' = -1$ ist dem ersten diametral entgegengesetzt, also den Punkt $(\pi - \theta_1, \pi + \varphi_1)$ in dem ursprünglichen System.

36 (36) Sind die ersten Ableitungen von f endlich, so folgt aus 140a), 140b):

$$\psi_n = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} F(1, \varphi')\, d\varphi' + \frac{1}{4\pi}(-1)^n \int_0^{2\pi} F(-1, \varphi')\, d\varphi'$$

$$- \frac{R}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_{-1}^{+1} \frac{\partial F}{\partial \xi'} P_n(\mu')\, d\mu'\, d\varphi'$$

$$= \frac{1}{2} F(1, \varphi') + \frac{1}{2}(-1)^n F(-1, \varphi') + D_n,$$

$$\psi_{n+1} = \frac{1}{2} F(1, \varphi') + \frac{1}{2}(-1)^{n+1} F(-1. \varphi') + D_{n+1},$$

wo D_n, D_{n+1} durch Vergröfserung von n unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden können, und hieraus die Behauptung im Text.

37 (37) Es ist bei genügend kleinem p, wenn wir zunächst Trennungspunkte in den Trennungskurven ausschliefsen:

$$\int_{\omega_1} \frac{\partial F}{\partial \xi'} d\omega = \int_\sigma \int_0^p \frac{\partial F}{\partial \xi'} d\varrho\, d\sigma + \int_{\omega_1} \frac{\partial F}{\partial \xi'} \cdot \varrho\, \psi\, d\omega,$$

wo ψ stets endlich ist und die Integrale mit dem Index σ über beide Ufer aller Trennungskurven zu erstrecken sind. Nun ist:

$$\text{abs. } \varrho \frac{\partial F}{\partial \xi'} \overline{\overline{<}}\, A \cdot p^{1-\lambda}, \qquad \text{abs.} \int_0^p \frac{\partial F}{\partial \xi'} d\varrho \overline{\overline{<}} \frac{1}{1-\lambda} A \cdot p^{1-\lambda}, \qquad \begin{array}{c}(A \text{ endlich}),\\ (\lambda < 1)_1,\end{array}$$

somit sind die beiden Integrale rechts durch Verkleinerung von p unter jeden Kleinheitsgrad herabdrückbar. Wir wollen hier auch den Fall von Trennungspunkten in den Trennungskurven ausführlich abmachen.

Es mögen in einem Punkte N der Kugel beliebig viele stetig gekrümmte Teile von Trennungskurven unter beliebigen Winkeln*) zusammentreffen; wir konstruieren um N einen Kreis auf der Kugel mit genügend kleinem Radius, der von den genannten Zweigen der Trennungskurven

*) Bei Ausschluss von Spitzen.

$\sigma_1\,\sigma_2\ldots\sigma_\lambda$ in den Punkten $1, 2\ldots\lambda$ geschnitten werde; wir bezeichnen jedes von den Kurven

$$\sigma_{j-1},\ j-1\ j,\ \sigma_j$$

begrenzte Flächenstück mit ω_j und haben zu zeigen, dass, wenn wir von ω_j einen Teil ω_{1j} abtrennen, von solcher Beschaffenheit, dass alle Punkte des übrigbleibenden Teiles von σ_{j-1} und σ_j eine gröfsere Entfernung haben, als die Länge P, das Integral:

$$\int\limits_{\omega_{1j}} \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\omega$$

durch Verkleinerung von P unter jeden Kleinheitsgrad herabgedrückt werden kann. Der Beweis ist verschieden, je nachdem der Winkel, den σ_j und σ_{j-1} einschliefsen, $\overline{\overline{<}}\,\pi$ oder $\overline{\overline{>}}\,\pi$ ist.

Fig. 92.

Im ersten Falle existiert eine ganz in dem Gebiete ω_j verlaufende Kurve ς von solcher Beschaffenheit, dass alle in dem Teile I liegenden Punkte von σ_{j-1} eine kleinere Entfernung haben, als von σ_j, und dass alle in dem Teile II liegenden Punkte von σ_j eine kleinere Entfernung haben, als von σ_{j-1}. Es folgt dann:

$$\int\limits_{\omega_{1j}} \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\omega = \int\limits_{\sigma_j+\sigma_{j+1}} \int\limits_0^r \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\varrho\, d\sigma + \int\limits_{\omega_{1j}} \frac{\partial F}{\partial \xi'} \cdot \varrho\, \psi\, d\omega,$$

Fig. 93.

wo $0 \overline{\overline{<}}\, r\, \overline{\overline{<}}\, P$ und ψ stets endlich ist, und daraus die Behauptung.

In dem zweiten Falle konstruieren wir den in N zu σ_{j-1} und den zu σ_j senkrechten Hauptkreis ς_{j-1} und ς_j und teilen dadurch ω_j in drei Teile I, II, III so, dass alle in dem Teile I liegenden Punkte von σ_{j-1} eine kleinere Entfernung haben, als von σ_j, alle in dem Teile II liegenden Punkte von σ_j eine kleinere Entfernung, als von σ_{j-1}, und dass schliefslich alle

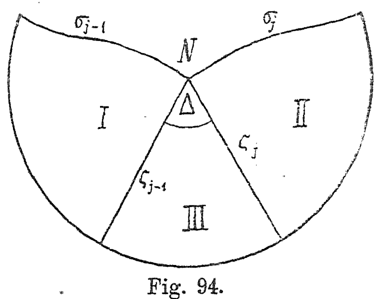


Fig. 94.

in dem Teile III liegenden Punkte von N kleinere Abstände haben, als von anderen Punkten von σ_j und σ_{j-1}. Dann ist, wenn wir wieder das Gebiet ω_{1j} abscheiden und Δ den Teil von ω_{1j} nennen, welcher in das Gebiet III fällt:

$$\int\limits_{\omega_{1j}} \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\omega = \int\limits_{\sigma_j + \sigma_{j-1}} \int\limits_0^r \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\varrho\, d\sigma + \int\limits_{\omega_{1j} - \Delta} \frac{\partial F}{\partial \xi'} \cdot \varrho\, \psi\, d\omega + \int\limits_{\varphi_{j-1}}^{\varphi_j} \int\limits_0^p \frac{\partial F}{\partial \xi'}\, d\varrho \cdot \varrho\, d\varphi,$$

wo φ_{j-1}, φ_j die Winkel sind, die die beiden Meridianebenen ς_{j-1}, ς_j mit irgend einer festen durch N gehenden Meridianebene bilden; daraus folgt wieder die Behauptung.

38 (38) Es ist jedes:

$$b^\varkappa = (\sqrt{1-\mu^2})^\varkappa \cos^\varkappa \varphi,$$
$$c^\lambda = (\sqrt{1-\mu^2})^\lambda \sin^\lambda \varphi,$$

somit, falls λ grade ist $= 2\Delta$:

$$\begin{aligned} b^\varkappa c^\lambda &= (\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+\lambda} \cos^\varkappa \varphi\, (1 - \cos^2 \varphi)^\Delta, \\ &= (\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+\lambda}\, \alpha_0 \cos(\varkappa+\lambda)\varphi \\ &\quad + \alpha_1 (1-\mu^2)(\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+\lambda-2} \cos(\varkappa+\lambda-2)\varphi + \cdots, \end{aligned}$$

wo $\alpha_0\, \alpha_1 \cdots$ Zahlenfaktoren sind. Ist λ ungrade $= 2\Delta + 1$, so folgt nach dieser letzten Gleichung:

$$\begin{aligned} b^\varkappa c^\lambda = \sqrt{1-\mu^2} \sin \varphi \Big\{ &(\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+2\Delta}\, \alpha_0 \cos(\varkappa+2\Delta)\varphi \\ &+ \alpha_1 (1-\mu^2)(\sqrt{1-\mu_2})^{\varkappa+2\Delta-2} \cos(\varkappa+2\Delta-2)\varphi \\ &+ \cdots \Big\}. \end{aligned}$$

Nun ist jedes:

$$\begin{aligned} \sin \varphi \cos(\varkappa + 2\Delta - 2i)\varphi = \frac{1}{2} [&\sin(\varkappa+\lambda-2i)\varphi \\ &- \sin(\varkappa+\lambda-2i-2)\varphi], \quad i = 0,\ 1,\ \ldots \end{aligned}$$

es wird also $b^\varkappa c^\lambda$ von der Form:

$$\begin{aligned} b^\varkappa c^\lambda = F_0 \cdot (\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+\lambda} &\sin(\varkappa+\lambda)\varphi \\ + F_1 \cdot (\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+\lambda-2} &\sin(\varkappa+\lambda-2)\varphi + \cdots, \end{aligned}$$

wo F_0, $F_1 \cdots$ ganze rationale Funktionen von μ sind.

39 (39) Ist z. B. λ ungrade $= 2j + 1$, so ist:

$$J(i, \varkappa, \lambda) = \int \mu^i (\sqrt{1-\mu^2})^{\varkappa+\lambda} \cos^\varkappa \varphi \sin^{2j+1} \varphi\, d\omega$$

und muss verschwinden, da:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{\varkappa} \varphi \, (1 - \cos^2 \varphi)^{j} \sin \varphi \, d\varphi = \Big| \text{ganzen rationalen Funktion } (\cos \varphi) \Big|_0^{2\pi} = 0.$$

Analoges folgt, wenn i oder $\varkappa$ ungrade ist, da man die Polarkoordinaten beliebig auf die x, y oder z Axe beziehen kann.

(40) Es ist, wenn wir für den Augenblick unter i die imaginäre Einheit verstehen: **40**

$$\cos^{2j} \varphi = \left(\frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2} \right)^{2j},$$

$$= \frac{1}{2^{2j}} \Big[2 \cos 2j\,\varphi + \frac{2j}{1} \cdot 2 \cos (2j - 2)\,\varphi + \frac{2j\,(2j-1)}{1 \cdot 2}\, 2 \cos (2j - 4)\,\varphi$$

$$+ \cdots + \frac{2j\,(2j-1) \cdots (j+3)}{1 \cdot 2 \cdots (j-1)}\, 2 \cos 2\varphi + \frac{2j\,(2j-1) \cdots (j+1)}{1 \cdot 2 \cdots j} \Big],$$

somit:

$$\int_0^{2\pi} \cos^{2j} \varphi \, d\varphi = 2\pi \, \frac{2j\,(2j-1) \cdots (j+1)}{1 \cdot 2 \cdots j \cdot 2^{2j}} = 2\pi \, \frac{\Pi(2j)}{2^{2j} [\Pi(j)]^2}.$$

(41) Man braucht, wie mit Hilfe der Betrachtungen im 2. Kapitel leicht folgt, von vornherein lediglich noch von den zweiten Ableitungen voraussetzen, dass sie innerhalb τ eindeutig und stetig oder selbst nur im allgemeinen eindeutig und stetig sind, ohne den Begriff der Potentialfunktion einzuschränken. **41**

(42) Gäbe es aufser den Funktionen V und W noch eine andere Funktion U, welche die Bedingungen in Zusatz 2 zu IXa), resp. Zusatz 3 zu IXa), erfüllen, so wäre, wenn man **42**

$$U' = U - V \text{ resp. } U - W$$

setzte, das über den ganzen Raum zu erstreckende Integral:

$$\int\!\!\int \left[\left(\frac{\partial U'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U'}{\partial z} \right)^2 \right] d\tau = - \int_\omega U_i' \left| \frac{\partial U_i'}{\partial \nu} \right|_i d\omega + \int_\omega U_a' \left| \frac{\partial U_a'}{\partial \nu} \right|_a d\omega,$$

wo ν die innere Normale von $d\omega$ vorstellt, somit $= 0$, da U' und $\frac{\partial U'}{\partial \nu}$ zu beiden Seiten der Fläche dieselben Werte haben sollen. Daraus folgt, es muss U' im ganzen Raum konstant sein und zwar $= 0$, da dies im Unendlichen der Fall sein muss.

(43) Um irgend welchen Misverständnissen vorzubeugen, wollen wir die folgenden Festsetzungen treffen: **43**

Wenn wir sagen, eine allgemeine Potentialfunktion U soll die Randwerte f an der Fläche ω besitzen, so soll, wenn man in irgend einem Punkte $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ der Fläche in irgend welcher (im übrigen beliebig kleiner) Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven die Normale ν_0 errichtet und auf derselben in der Entfernung r den Punkt $(\xi' \eta' \zeta')$ markiert die Differenz

$$U(\xi' \eta' \zeta') - U f(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$$

durch Verkleinerung von r unter jeden Kleinheitsgrad ε herabdrückbar sein.

Wenn wir von einer normalen Ableitung $\frac{\partial U}{\partial \nu_0}$ in $(\xi_0 \eta_0 \zeta_0)$ sprechen, so wird die Voraussetzung gemacht, dass

$$\left| \frac{\partial U}{\partial \nu_0} \right|_{(\xi' \eta' \zeta')}$$

bei Verkleinerung von r gegen einen endlichen Grenzwert $\frac{\partial U}{\partial \nu_0}$ gleichmäfsig*) konvergiert, und wir sagen, die normale Ableitung von U an der Fläche ω ist eindeutig und stetig, wenn dieser Grenzwert eine stetige Funktion der Stelle auf ω ist.

44 (44) Es folgt dies, weil das uneigentliche Integral:

$$\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sin^{\lambda} \theta}, \ (\lambda < 1)$$

für Werte von θ_0, die unter einer gewissen (endlichen) Grenze liegen, endlich, somit jedes Integral über die Ringfläche (ϱ) von der Form $\varDelta(\varrho)$ wird Es sei hier noch hinzugefügt, dass der Satz auch ohne die Bedingungen 5a) gültig ist.

45 (45) Die Bedingung:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \varDelta(\varrho)$$

in (20) im Satze IV b) und IV c), die Bedingung:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \varDelta(\varrho)$$

---

*) d. h. es soll die Differenz:

$$\left| \frac{\partial U}{\partial \nu_0} \right|_{(\xi' \eta' \zeta')} - \frac{\partial U}{\partial \nu_0}$$

durch Verkleinerung von r unter jeden Kleinheitsgrad herabdrückbar sein.

in (27), in den Sätzen V und VI, die Bedingung:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} \varkappa_i{}^{*)} \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \Delta(\varrho)$$

in (52) und den Sätzen VII, die Bedingung:

$$\varrho \frac{\partial}{\partial \nu} \int_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega = \Delta(\varrho)$$

in der Anm. S. 248 und im Satze VIII, sind lediglich hinzugefügt, um von vornherein den Integralen:

$$\int_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial W}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z}\right)^2\right]^{**)} d\tau'$$

einen endlichen Grenzwert zu sichern; kann man die Existenz dieses endlichen Grenzwertes auf irgend welchem anderen Wege, wenn auch nachträglich, beweisen, so können die obigen Bedingungen fortbleiben.

(46) Nur sind bei dem Beweise die Ringflächen (ϱ) um die Trennungskurven zu berücksichtigen; dass die Integrale über dieselben unter jeden Kleinheitsgrad durch Verkleinerung von ϱ herabdrückbar sind, folgt, wie in Anm. (44) die analoge Behauptung. **46**

(47) Statt der Endlichkeit der zweiten Ableitungen genügt nach Erweiterung von IVc in Anm. ([24]) auch die Regularität der ersten Ableitungen in endlichen Entfernungen von den Trennungskurven oder irgend welche Bedingung, welche die Eindeutigkeit und Stetigkeit aller ersten Ableitungen von **47**

$$\int_{\omega} \varkappa \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega \text{ resp. } \int_{\omega} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

in endlicher Entfernung von den Trennungskurven Gewähr leistet.

Für den ersten Teil des Satzes V, die Darstellung der Funktionen U_i und U_a für den Innen- resp. Aufsenraum einer Kugelfläche (R) in der Form:

$$U_i = \frac{1}{2\pi} \int_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{4\pi R} \int_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

$$U_a = -\frac{1}{2\pi} \int_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \frac{1}{4\pi R} \int_{(R)} f \frac{d\omega}{r}$$

lassen sich die Bedingungen noch weiter fassen:

---

*) oder $\varkappa_a$.

**) resp. $\int_{\tau'} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial z}\right)^2\right] d\tau$

Zusatz zu V. Ist f eine eindeutige und stetige Funktion der Stelle auf der Kugelfläche (R), deren erste Ableitungen eindeutig und stetig sind, solange man sich in endlicher Entfernung von einer endlichen Anzahl von Trennungskurven hält, während bei genügender Annäherung an dieselben die Relationen:

$$\varrho \frac{df}{dh} = D(\varrho)$$

erfüllt sind, so sind die Funktionen:

$$U_i = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega - \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

$$U_a = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega + \frac{1}{4\pi R} \int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{r},$$

in denen ν die innere Normale des Elementes $d\omega$ vorstellt, die stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen des Innen- resp. Aufsenraums der Kugelfläche, welche an derselben die Randwerte f besitzen.

Die zum Beweise notwendigen Entwickelungen nach Kugelfunktionen (vgl. III. Teil, IV. Abschnitt, 2. Kap. § 3, S. 210—212) der Integrale

$$\int\limits_{(R)} f \frac{d\omega}{\nu} \text{ und } \int\limits_{(R)} f \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

gelten hier nach V c) des II. Teiles an der Kugelfläche und nach Zusatz zu V a) für jeden Punkt mit einer Centraldistanz:

$$R_i < R, \qquad \text{(in strengem Sinne)}$$
$$R_a > R,$$

und die obigen Integrale konvergieren mit abnehmendem

$$R - R_i \text{ resp. } R_a - R$$

gleichmässig gegen ihre Randwerte an der Kugelfläche.

48 (48) Aus der Art der Transformationen 58 (59) folgt, dass wenn die Funktionen $\varkappa_i$ resp $\varkappa_a$ mit Bezug auf die Fläche ω die Voraussetzungen des Satzes IV c) erfüllen, auch die Voraussetzungen des Satzes V für die Funktionen W' in bezug auf die Kugelfläche (R) erfüllt sind; dasselbe gilt auch, wenn man als Voraussetzungsn dieses Satzes (vgl. Anm. 47) an Stelle der Endlichkeit der zweiten*) Abteilungen von $\varkappa_i \varkappa_a$ in endlichen Entfer-

*) Für eine erste Übersicht der Verhältnisse geht man am besten von dieser weiten Annahme aus, indem man auch noch die Eindeutigkeit und Stetigkeit der ersten Ableitungen, Endlichkeit der zweiten Ableitungen von $\cos(\nu x)$, $\cos(\nu y)$, $\cos(\nu z)$ auf den stetig gekrümmten Teilen von ω hinzunimmt.

nungen von den Trennungskurven lediglich die Regularität der ersten Ableitungen voraussetzt.

49) Aus der bekannten Ungleichung: **49**

$$\left(\sum_1^n {}_j\, a_j\, b_j\right)^2 \overline{\overline{<}} \sum_1^n {}_j\, a_j^2 \sum_1^n {}_j\, b_j^2$$

folgt die Ungleichung:

$$\left[\int\limits_\omega \varphi \cdot \psi\, d\omega\right]^2 \overline{\overline{<}} \int\limits_\omega \varphi^2\, d\omega \cdot \int\limits_\omega \psi^2\, d\omega.$$

(50) Hält man sich zunächst in endlicher Entfernung von den **50** Trennungskurven, so kann man ein endliches Gebiet ω_1 abscheiden, welches die Trennungskurven enthält und von (xyz) endliche Entfernungen hat, während der übrige Teil ω_2 von ω nur endliche Entfernungen von den Trennungskurven hat. Es ist dann der von ω_2 herrührende Teil von $\mathfrak{U}_j$ seinem absoluten Werte nach

$\overline{\overline{<}}$ endl. Konst. Δ^j, (nach IVa) des I. Teiles und der ersten Formel 174),

der von ω_1 herrührende Teil:

$$\overline{\overline{<}} \frac{1}{2\pi} \sqrt{\int\limits_{\omega_2} (W_j - C_j)^2\, d\omega \int\limits_{\omega_2} \frac{\cos^2(r\nu)}{r^4}\, d\omega}, \text{ [nach Anm. (49)]},$$

$$\overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst. } \Delta^j, \text{ nach 148), da } L \overline{\overline{<}} \Delta,$$

folglich:

$$\text{abs. } \mathfrak{U}_j \overline{\overline{<}} \alpha\, \Delta^j, \ (\alpha \text{ endlich}).$$

Nähert man sich dagegen den Trennungskurven auf ω selbst oder einer Fläche, welche mit den Teilen von ω von null verschiedene Winkel einschliefst, und bezeichnet man mit ϱ den kürzesten Abstand des variabeln Punktes von den Trennungskurven, so ist:

$$\text{abs. } \mathfrak{U}_j \overline{\overline{<}} \frac{\text{endl. Konst.}}{\varrho} \sqrt{\int\limits_\omega (W_j - C_j)^2\, d\omega \int\limits_\omega \frac{\cos^2(r\nu)}{r^2}\, d\omega}$$

(genau analog der Untersuchung S. 265—266),

$$\overline{\overline{<}} \beta\, \frac{\Delta^j}{\varrho}, \text{ (nach 148)), } (\beta \text{ endlich}).$$

(51) Sei nämlich zunächst j grofs genug, dass bei beliebig kleinem ε **51**

$$\text{abs. } \frac{\partial \mathfrak{W}_{ji}}{\partial \nu} \overline{\overline{<}} \varepsilon,$$

dann folgt nach 180a) und 180b), sowie infolge der Formel:

$$180c)\quad \text{abs. } \mathfrak{W}_{ji} \overline{\lessgtr} (\text{endl. Konst.})\, A^j, \quad (A \text{ endlich})$$

die auch bei unendlicher Annäherung an die Trennungskurven gilt:

$$\mathfrak{T}_{ji} \overline{\lessgtr} \left[\Gamma - B \log P + C A^j \cdot P\right] \varepsilon, \quad (\Gamma, B, C \text{ endlich})$$

wo P eine beliebig klein zu wählende Länge vorstellt; wir setzen:

$$P = \left(\frac{1}{A}\right)^j,$$

dann folgt:

$$\mathfrak{T}_{ji} \overline{\lessgtr} (A + jB)\, \varepsilon, \quad (A, B \text{ endlich})$$

$$\lim_{j=\infty} \mathfrak{T}_{ji} = 0,$$

da infolge

$$\lim_{j=\infty} j^2\, T_{ji} = \lim_{j=\infty} j^2\, T_{ja} = 0,$$

auch:

$$\lim_{j=\infty} j \frac{\partial W_{ji}}{\partial \nu} = \lim_{j=\infty} j \frac{\partial W_{ja}}{\partial \nu} = 0,$$

somit auch:

$$\lim_{j=\infty} j \frac{\partial \mathfrak{W}_j}{\partial \nu} = 0.$$

52 (52) Wir werden unsere Sätze lediglich für den Fall konstanter Sprünge in den Trennungskurven zur Anwendung bringen; für den allgemeinen Fall sei hier an die Bemerkung in Anm. ([21]) erinnert; wir müssen die — für unsere Fälle von selbst erfüllte — Bedingung hinzufügen, dass für zwei Punkte $(\xi_1\, \eta_1\, \zeta_1)$ und $(\xi_2\, \eta_2\, \zeta_2)$ der Trennungspunkt in genügend kleiner Entfernung r_{12} die Sprünge ψ die Relationen erfüllen:

$$\psi_2 - \psi_1 = \Delta (r_{12}).$$

53 (53) Die durch die Neumann'sche Methode konstruierten stetigen, allgemeinen Potentialfunktionen, welche eindeutigen und stetigen Randwerten f entsprechen, sind stets zugleich reguläre, allgemeine Potentialfunktionen, da sie von der Form sind:

$$\text{reg. allg. Potf.} + \int_\omega \frac{W_a + W_i}{r^2} \cos (r\nu)\, d\omega,$$

wobei W selbst von der Form ist:

$$W = \int_\omega \varkappa \frac{\cos (r\nu)}{r^2}\, d\omega,$$

der zweite Teil der Neumann'schen Funktionen hat daher nach Satz 2b und 3b der Anm. ([24]) die Eigenschaften regulärer, allgemeiner Potentialfunktionen in der Nähe der Trennungskurven, und zwar nicht blos in der

Nähe der Trennungskurven in bezug auf f, sondern in der Nähe irgend einer beliebigen auf ω konstruierten Trennungskurve.

(54) Für den Fall, dass die Fläche ω aus zwei getrennten Teilen $\omega_1\,\omega_2$ besteht, an deren einem eine gegebene stetige allgemeine Potentialfunktion die Werte 0, an deren anderem sie die Werte 1 besitzt, ergiebt sich, falls die Fläche ω' ganz innerhalb des von $\omega_1\,\omega_2$ begrenzten Gebietes liegt, bereits aus Zusatz 4 zu VII des III. Teiles der 54

Zusatz zu IX. Ist U die stetige, allgemeine Potentialfunktion des von zwei getrennten Flächen $\omega_1\,\omega_2$ begrenzten Gebietes, welche an der Fläche ω_1 die Randwerte null hat, während sie an der Fläche ω_2 der Ungleichung genügt:

$$\text{abs. U} < \Gamma,$$

wo Γ eine endliche Konstante vorstellt, so ist auf irgend einer Fläche ω', welche ganz innerhalb jenes Gebietes verläuft:

$$\text{abs. U} \lesseqgtr \Gamma\lambda,$$

wo λ einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Gestalt und Lage der Flächen $\omega_1\,\omega_2\,\omega'$ abhängt.*)

(55) Der Satz gilt auch dann noch, wenn nur die ersten Ableitungen von f in endlicher Entfernung von σ und irgend welchen Trennungskurven regulär sind und bei genügender Annäherung an diese Kurven die Relationen: 55

$$\varrho\frac{\partial f}{\partial h} = D(\varrho),$$

$$\varrho\frac{\partial}{\partial \nu}\int\limits_{\omega} f\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = \Delta(\varrho),$$

$$\varrho\frac{\partial}{\partial \nu}\int\limits_{\omega'} f\frac{\cos(r\nu)}{r^2}\,d\omega = \mathfrak{D}(\varrho)$$

erfüllt sind.

(56) Bei dieser Ausdrucksweise möge verstanden werden, dass die betreffenden normalen Ableitungen sich aus zwei Teilen 56

$$H_0 \text{ und } H_1$$

zusammensetzen, von denen die ersten bei genügender Annäherung an σ den Relationen:

$$\varrho H_0 = \Delta(\varrho)$$

---

*) Es folgt hieraus im besonderen:

Ist U_1 eine Potentialfunktion des Aussenraumes τ einer geschlossenen Fläche ω_1 und an derselben ihrem absoluten Werte nach $\lesseqgtr \Gamma$, so ist abs. $U \lesseqgtr \Gamma\lambda_{12}$ auf jeder innerhalb τ verlaufender Fläche ω_2, wo λ_{12} einen echten Bruch vorstellt, der lediglich von der Lage der beiden Flächen $\omega_1\,\omega_2$ abhängt.

genügen, während H_1 in irgend welcher Entfernung von vereinzelten Punkten eindeutig und stetig ist und bei genügender Annäherung an dieselben den Relationen:

$$\text{abs. } \varrho H_1 \overline{\overline{<}} \text{ endl. Konst.}$$

genügt.

57 (57) Nachdem man mit Hilfe einer Schwarz'schen Operation zur Kombination zweier Flächen gelangt ist, kann man dieselbe zur Kombination dieses Komplexes mit einer dritten Fläche verwenden*) und so fort.

58 (58) Man braucht die Schwarz'schen Methoden nur unter den in Anm. (55) gegebenen Bedingungen in Anwendung zu bringen.

59 (59) Ebenso, wie:

$$\text{abs.} \int_\omega \varkappa \frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2} d\omega \overline{\overline{<}} \text{A. abs. Max. } \varkappa, \text{ (A endlich)},$$

so ist:

$$\text{abs.} \frac{\partial}{\partial\nu} \int_\omega H \frac{d\omega}{\mathrm{r}} \overline{\overline{<}} \text{A. abs. Max. } H, \text{ (A endlich)}.$$

60 (60) Sind lediglich die ersten Abteilungen von f auf ω regulär, so ist zunächst:

$$\int_\omega \frac{\partial \mathfrak{W}_1}{\partial\nu} \frac{d\omega}{\mathrm{r}} \begin{cases} = \int_\omega \mathfrak{W}_{1i} \frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2} d\omega, \text{ im Aussenraume,} \\ = \int_\omega \mathfrak{W}_{1a} \frac{\cos(\mathrm{r}\nu)}{\mathrm{r}^2} d\omega, \text{ im Innenraume} \end{cases}$$

Potentialfunktion des Innenraumes, sowie Aussenraumes nach Erweiterung des Satzes Vb) des I. Teiles in Anm. (24), ferner folgt die Konvergenz und Regularität der Reihen:

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial\nu} + \frac{\partial \mathfrak{W}_3}{\partial\nu} + \ldots$$

$$\frac{\partial \mathfrak{W}_2}{\partial\nu} - \frac{\partial \mathfrak{W}_3}{\partial\nu} + \ldots$$

genau wie früher.

61 (61) Man kann mit Rücksicht auf die Anm. (60) auch hier mit der Regularität der ersten Ableitungen von f an Stelle der Endlichkeit der zweiten Ableitungen auskommen.

62 (62) Wir brauchen in dem Beweise (S. 348) die Regularität der ersten Ableitungen von f nur zum Nachweis dafür, dass die ersten Ableitungen von:

$$\mathfrak{V}_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_\omega \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{r}} d\omega$$

---

*) Wir bezeichnen diese Kombination auch wieder kurz als eine Schwarz'sche Operation.

regulär sind; das folgt aber mit Hilfe der Formel:

$$\frac{\partial \mathfrak{B}_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} f \cos(\nu x) \frac{\cos(r\nu)}{r^2} d\omega$$

$$- \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\omega} \frac{\frac{\partial f}{\partial \xi} - f \cos(\nu x)(f_{11} + f_{22} + f_{33})}{r} d\omega$$

(Formel 54. S. 42)

bei beliebiger xRichtung nach Satz 1 und 4b in Anm. ([21]) bereits aus der Endlichkeit der ersten Ableitungen von f.